# ［場の量子論］

## ミクロ、マクロ、そして熱物理学の最前線

H.Umezawa 著　有光敏彦・有光直子 共訳

# ADVANCED FIELD THEORY

## Micro, Macro, and Thermal Physics

Hiroomi Umezawa

培風館

ADVANCED FIELD THEORY

Micro, Macro, and Thermal Physics

by

Hiroomi Umezawa



This translation of Advanced Field Theory originally published in English in 1993 is published by arrangement with the American Institute of Physics Press.
本書の英語版原著は1993年にthe American Institute of Physics Pressより出版されたものである。

# まえがき

現在，物理学における基本的相互作用は場の量子論によって定式化されている。少数の基本的要請にしかよらない統一的メカニズムを探るいろいろな野心的試みが，多くの研究者によって進められてきた。これらの試みが最終的にどこまで成功を収めるかは予測できない。しかし，多岐にわたる領域で共有されているさまざまな物理概念が，場の理論と本質的に関連していることが次々に明らかにされてきている。その中には，秩序・無秩序，対称性の破れ，相関，集団モード，巨視的量子数，巨視的量子現象，その他が含まれる。この進展で注目すべき点は，ミクロとマクロの間の差がせばめられたことである。そこで，これらの概念に基づいて，物理学の広い領域にわたる統一的描像の建設を試みることは価値のあることである。本書はその方向へのひとつの試みである。

統一的な展望を与えることだけが本書の目的ではない。本書の使い道は他にも考えられる；たとえば，通常の場の量子論の講義の補足となろう。Hilbert 空間に非同値表現が存在すること（このことによって，場の量子論は量子力学と一線を隔している）が，対称性の破れ，秩序状態，巨視的量子状態の基礎である。当然この主題は場の量子論の講義の一部に加えられるべきものだが，通常の教科書には含まれていない。この目的だけならば，はじめの 4 章を読めばよい。さらに，対称性の破れと秩序状態の簡単な説明がある 5 章も含めることを推奨する。私は本原稿を，Alberta 大学理論物理の大学院博士課程の講義に用いた。その経験によると，3 ヶ月半の講義ではじめの 5 章を終えることができる。

巨視的量子現象に興味のある読者にとっては，はじめの 6 章がよい解説になっている。また，熱にかかわる場の量子論に興味のある読者にも利用価値があろ

う。その場合は6章は省略可能である。熱平衡状態の場の量子論にのみ興味のある読者には，9章も省略できるであろう。

本書は統一的物理観の提供をめざしているが，熱にかかわる場の量子論の演算子法である Thermo Field Dynamics（TFD）に特に重きをおいている。最近の進展も含め，TFD を体系的かつ首尾一貫した形で解説してある。

章末の参考文献リストは完全なものではない。本書の主題が物理学の広い範囲にわたっているので，納得できる完全な参考文献リストを作ることはたいへん難しい。しかし，実はこれは筆者の責任である：私には参考文献をきちっと整理しておく習慣がない。多くの重要な文献が落ちているに違いない。文献として掲載し忘れた研究者に心からおわびを申し上げる。読者が落ちている論文を知らせてくだされば幸いである。7章のほとんどの参考文献は，私の研究グループからのものである。この章が TFD の初期段階の発展に関する紹介なので，これは避けられなかった。しかし，この章全体の記述は，真空の概念を基礎にした本書の中心課題へなめらかにつながる形で再構成してある。熱にかかわる多数の場の理論の中から TFD を選んだのも，それが真空に関する同じ概念に基づいているからである。TFD と他の熱にかかわる場の量子論との関係は，8章に簡単にまとめてある。9章は TFD の新しい試みを扱っているので，そこの参考文献も TFD のものにかたよっている。

本書を準備している期間，多くの方の援助を受けた。その方々の助けがなければ，本書を書くことは不可能であったろう。山中由也博士は，有意義な助言で絶え間なく私を助けてくれた。Timothy Evans 博士は本書の初校を徹底的に読み，また Harry Schiff 博士は本書の最終校を注意深く読んで，コメントや助言をしてくれた。中村孔一博士，有光敏彦博士，Henyou Chu 博士は，有意義なコメントと価値ある示唆をしてくれた。本書は，これらの方々の詳細で注意深いコメントによって少なからず改良された。6章の大部分は，Nicolas Papastamatiou 博士と私が準備した論文に基づいている。私の秘書の Patricia Anderson 夫人も，あらゆる面で原稿作成に協力してくれた。最後になったが，編集者 John Zumerchik 氏に特にお礼を申し上げたい。彼のあらゆる点での励ましと指導は，この仕事を仕上げるのに不可欠なものであった。これらすべての方々に心よりお礼を申し上げます。

H. Umezawa

エドモントン

1992年6月

# 目　　次

# 1
# 巨視的物理と微視的物理

## 1.1 ミクロ，マクロそして熱

我々が目にする自然現象は，そのほとんどが巨視的なものであるが，それら巨視的な系は驚くほど変化に富んだ形態（あるいは「相」）を呈する。たとえば：気体 → 液体 → 結晶（巨視的欠陥をともなったもの）；常磁性金属 → 強磁性金属（磁壁をともなったもの）；常伝導体 → 超伝導体（渦電流をともなったもの，あるいはともなっていないもの）などである。これらの相の多くは，それぞれの秩序（結晶秩序，磁気秩序，超伝導秩序など）によって特徴づけられる。5章で扱うが,「秩序」の定義には，物理学における対称性とその破れに関する数学的な定式化が必要である。当面，ある種の規則正しいパターンを呈する状態を秩序状態と呼ぶことにして，話を進めよう。ただし，秩序を壊すなんらかの欠陥が必ずともなうので，このような秩序は決して完全なものではありえない。

巨視的な系の示すこの複雑な振舞いをみていると，次のような一連の疑問がわいてくる。なぜ，同一の系がいくつもの相になり得るのか。違う相の間の転移は，いかなるメカニズムで起るのか。いったいなぜ秩序状態は，欠陥をともなってその秩序を壊すのか。これらの疑問をよくよく吟味すると,「巨視的な系は膨大な数の基本的な要素で構成されており，相の違いはこれらの要素の異なった状態あるいは集合体に対応しているのではないか」と思えてくる。この基本

的要素の世界は微視的世界と呼ばれている。

微視的世界の物理描像は，元来単純なものであった。すべての巨視的な系は，膨大ではあるが有限の数の原子と呼ばれる微小粒子で構成されていると考えられてきた。そこで，微視的世界の物理に基づいて巨視的な現象を解釈して，上に挙げたすべての疑問に対する答を見出すことは魅力的な仕事である。しかし，微視的世界は巨視的世界を記述する古典物理の法則に支配されていないので，この作業は複雑なものになる。現在では，これらの巨視的な系は，その運動が量子物理の法則で支配されている「基本的実在」で構成されていることが知られている。そうだとすると,「量子物理の法則に支配される微視的系が，古典物理の法則に支配される巨視的現象をいかにして具現できるのか？」という疑問に直面する。

ミクロ → マクロ
(量子物理) (古典物理)

このメカニズムが解明されれば，物性物理学における物質の解明に強力な手法を得たことになろう。さらに魅惑的な現象をも解釈できるようになるかもしれない。その一つは，驚くほどに洗練され安定な生命体における秩序の理解である。ことに，人間の脳における記憶の巧みさから，秩序制御の洗練されたメカニズムがわかる。もう一つは，宇宙誕生以来の進化とその種々な秩序に関する一貫した描像を仕上げることである。

すべての巨視的な系に共通な特性は熱的な効果である。熱現象の研究により，熱力学と呼ばれる美しい古典物理学が完成した。異なった秩序状態間で起こる相転移には，熱的効果が決定的な役割を果たしていることがよく知られている。古典熱力学では，相転移を現象論的に記述している。ミクロとマクロ間の橋渡しのメカニズムを解明すれば，熱の微視的な起源が明らかになるだろうと期待するのも当然ではなかろうか。これが，統計力学の課題の一つである。統計力学は,「巨視的な量は，巨視的手段によってのみ観測できる」という信念に基づいている。巨視的手段では，無数の微視的物体が示す非常に複雑な振舞いの，ある種の統計平均のみが観測される。微視的な振舞いはたいへん込み入っており，個々の微視的粒子の運動を観測する手段はないのである。この平均操作が，熱現象を説明するだろうと期待された。その背景には，膨大な数ではあるが有限個の微視的粒子という古典原子論の描像がある。

「量子物理」といえば量子力学を連想するであろう。たしかに，歴史的には量子力学が初めての量子理論である。量子力学は，有限個の粒子あるいは有限

個の自由度という古典原子論の描像を継承している。しかし，有限個の粒子という概念は，古典物理学においても自然現象全体を解釈することはできなかった。無限自由度を要する「場」の概念が電磁気学で広まり，場の古典論として発展したのである。場の理論の量子版が場の量子論である。量子物理は量子力学と場の量子論の双方を含んでいる。上で述べたミクロとマクロの世界の間の関係を明らかにするためには，古典物理と量子物理双方での現代的な手法が必要なのである。

## 1.2 粒子や場の古典物理

古典物理に従う粒子からなる孤立系を考える。粒子数を $n$ と記そう。個々の粒子の運動はその位置と運動量の時間的振舞いによって記述される。$n$ 個の粒子の位置ベクトルと運動量ベクトルを，$\vec{x}_i$，$\vec{p}_i$ （$i = 1, 2, \cdots, n$）と表わす。粒子は，$n$ 個の位置ベクトルで与えられるポテンシャル $V$ の中を運動していると仮定しよう。各粒子に働く力 $\vec{f}_i$ は，

$$\vec{f}_i = -\vec{\nabla}_i V \tag{1.1}$$

で与えられる。系の運動は方程式

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{f}_i \tag{1.2}$$

$$m_i \dot{\vec{x}}_i = \vec{p}_i \tag{1.3}$$

に従う。ただし，ドットは時間微分を意味する。こうして，$n$ 個の粒子の運動は，位相空間と呼ばれる $2n$ 本のベクトル $(\vec{x}_i, \vec{p}_i)$ で張られた $6n$ 次元の空間内の 1 本の軌道として記述される。この軌道は，特定の時刻（たとえば $t_0$ ）における $2n$ 個のベクトルを与えれば決定される。ハミルトン形式では，(1.2) や (1.3) はラグランジアン $\mathcal{L} = \sum (1/2) m_i \dot{x}_i^2 - V$ から変分法によって得られる。$\partial \mathcal{L}/\partial \dot{\vec{x}}_i = m_i \dot{\vec{x}}_i$ は (1.3) により $\vec{p}_i$ と等しいので，$\vec{p}_i$ が $\vec{x}_i$ の正準共役量である。

ハミルトニアン $H = \sum \dot{\vec{x}}_i \vec{p}_i - \mathcal{L}$ は，ラグランジアンから

$$H = \sum_i \frac{1}{2m_i} p_i^2 + V \tag{1.4}$$

となるが，これは系のエネルギーである。(1.2) と (1.3) よりエネルギー保存則 $\dot{H} = 0$ が得られる。このことは，これらの方程式が時間並進 $t \to t + c$（ $c$

は定数）に関して不変であることと関連している。時間並進不変性は，孤立系では時間の原点が任意に選べるということの反映である。空間座標の原点も任意に選べるので，(1.2) や (1.3) は（したがって，ラグランジアンは）空間並進 $\vec{x}_i \to \vec{x}_i + \vec{c}$（ $\vec{c}$ は定ベクトル）に関して不変である。このことは，ポテンシャルが $V = V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{x}_1 - \vec{x}_3, \cdots)$ のように位置ベクトルの差で与えられることを意味する。これより $\sum \vec{\nabla}_i V = 0$ が得られるが，これは全運動量保存の法則

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i = 0 \tag{1.5}$$

である。さらに，孤立系では空間座標の向きの選び方に任意性があるので，ラグランジアンは空間座標のいかなる回転に関しても不変になる。これより全角運動量 $\sum \dot{\vec{l}}_i = 0$ の保存が導かれる。ただし，角運動量は $\vec{l}_i = \vec{x}_i \times \vec{p}_i$ で与えられる。このように，ラグランジアンの不変性は保存則を与えるのである。不変性と保存則のこの普遍的関係は量子物理学に受け継がれ，本書の主題の中心的な役割を果たすものである。

**問 1** 先に挙げたラグランジアンの形を用いずに，時間・空間の並進と空間の回転に関するその不変性だけを仮定し，Hamilton-Jacobi 法により上記の保存則を導出せよ。

特殊相対性理論が示すように，いわゆるニュートン力学に従う粒子の上記の古典的な方程式は，速さの小さい物体についてだけ正しい。高速の物体も含んだ正しい理論が特殊相対性理論である。自由粒子の場合は，

$$H = \sum_i \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \tag{1.6}$$

である。ここでは，$c = 1$ なる単位系を採用している。この $H$ により $H - \sum_i m_i$ を評価すると，$\vec{p}_i$ が小さいときニュートン力学でのハミルトニアンが得られる。

ここまでは粒子系を考えてきたが，粒子描像だけで古典物理全体が理解できるわけではない。電磁波は粒子というより波として伝播する。この波の性質は場の概念とよくなじみ，したがって Maxwell による電磁場の定式化が電磁気現象のもっとも一般的なものである。**場の理論では，記述される系のあらゆる時刻での状態は，その時刻におけるすべての空間領域にわたる観測量全体によって特定される。** したがって，場で表わされる系の現実的な状態は，空間座標 $\vec{x}$ の基本的な関数の組で記述される。この関数は時間や時間発展の仕方にも依存しており，場の時間発展を記述するのである。電磁気学では，その基本的な関

数は電場 $\vec{E}(\vec{x},t)$ と磁場 $\vec{H}(\vec{x},t)$ である。これらの関数は，Maxwell の方程式：

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=0 \tag{1.7}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{c}\vec{j} \tag{1.8}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho \tag{1.9}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0 \tag{1.10}$$

に従う。ただし，$\vec{j}$ と $\rho$ は，それぞれ電流密度と電荷密度を表わす。

この方程式を簡略に書くために，記号：

$$\partial^i=\frac{\partial}{\partial x_i},\quad \partial^0=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \tag{1.11}$$

と

$$\partial_\mu=g_{\mu\nu}\partial^\nu \tag{1.12}$$

を導入しよう。ただし，添え字 $\mu$ は 0, 1, 2, 3 のいずれかであり，$g_{\mu\nu}$ は対角要素 $g_{00}=-1, g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$ をもつ行列である。以下では，添え字がくり返されたときは，断らないかぎり，和をとるものとする。たとえば，

$$\partial^2\equiv\partial^\mu\partial_\mu \tag{1.13}$$

$$=\vec{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{1.14}$$

である。以下では $c=1$ なる単位系をしばしば用いる。

さて，Maxwell 方程式は

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}=j_\mu \tag{1.15}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\partial_\nu F_{\sigma\rho}=0 \tag{1.16}$$

となる。ただし，$F_{\mu\nu}$ は $F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$ を満たし，$E_i=F_{0i}$，$F_{ij}=\epsilon^{ijk}H_k$ で定義される。つまり，$F_{12}=H_3, F_{23}=H_1, F_{31}=H_2$ である。なお，$\epsilon^{ijk}$ はどの添え字の互換に関しても反対称である（$\epsilon^{123}=1$）。$F_{\mu\nu}$ は $4\times4$ 反対称行列なので 6 個の独立な要素をもつ；3 個は $\vec{H}$ を，残りは $\vec{E}$ を与える。$\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$ は，$\epsilon^{0123}=1$ の基にしてどの添え字の互換に関しても符号を替えるという条件で定義される。下つき添え字 $\mu$ は，メトリック・テンソル $g^{\mu\nu}$ で $F_\mu{}^\sigma=g^{\sigma\nu}F_{\mu\nu}$ のように上つきになる。4 元電流密度 $j_\mu$ は $(\vec{j},c\rho)$ で定義される。よく知られ

ているように，個々の添え字 $\mu$ は Lorentz 変換で 4 元ベクトルとして振る舞うので，Maxwell 方程式の上のような表わし方は Minkowsky 幾何学における共変表記である。つまり，Maxwell 理論は相対論的不変性をもつ。このことが特殊相対論の進展をもたらしたのである。

電磁場は 4 元ベクトル・ポテンシャル $A_\mu(\vec{x},t)$ で

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{1.17}$$

のように表わされることが知られている。$F_{\mu\nu}$ したがって Maxwel 方程式は，ゲージ変換 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \lambda$ に関して不変である。ただし，$\lambda(\vec{x},t)$ は，**その Fourier 変換が定義可能なものである**とする。この条件のおかげで，**ゲージ関数は条件**：

$$[\partial_\mu, \partial_\nu]\lambda = 0 \tag{1.18}$$

**を満たすことが保証される**。このため，$F_{\mu\nu}$ がゲージ不変となるのである。この条件 (1.18) を満たさない関数の例として，円柱座標系の第 3 軸まわりの角度 $\theta$ を考えよう。この場合，

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\theta = \vec{e}_3 \delta(x_1)\delta(x_2) \tag{1.19}$$

となる。これは，この角度が第 3 軸に沿ってトポロジカルな特異性をもつ多価関数であるためである。Fourier 変換が存在するという上記の条件により，このようなトポロジカルな関数は排除されるのである。Fourier 変換可能な関数は 2 乗可積分

$$\int d^3x |\lambda|^2 < \infty \tag{1.20}$$

であるから，この条件により非常に大きな $\vec{x}$ の領域で発散するような関数も排除される。

$j_\mu = 0$ と仮定して電磁放射を調べよう。この場合，$A_0 = 0$ という特定のゲージが選べる。すると，Maxwell 方程式は，

$$\partial^2 \vec{A} = 0 \tag{1.21}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \tag{1.22}$$

となる。表式 (1.21) は $\vec{A}$ が波として伝播することを示し，また，(1.22) はそれが 2 成分の横波であることを示している。したがって，ベクトル・ポテンシャルは次のように Fourier 展開できる：

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \, \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} [\vec{a}_k e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_k t)} + \vec{a}_k^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_k t)}]. \tag{1.23}$$

ただし，$x$ は $(\vec{x},t)$ であり，$\omega_k=|\vec{k}|$ である。振幅につけた添え字 $k$ は $\vec{k}$ の意味である。$\vec{a}_k$ には，$\vec{k}$ の方向に垂直な 2 成分 $(a_{i,k};\ i=1,2)$ がある。

Maxwell 方程式を導くラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = -\int d^4x \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{1.24}$$

$$= \int d^4x \frac{1}{2}[E^2 - H^2] \tag{1.25}$$

である。これより，いま採用しているゲージ $A_0=0$ では，$\vec{A}(x)$ の正準共役は $\vec{E}$ であることがわかる。このラグランジアンからハミルトニアン

$$H = \int d^3x \frac{1}{2}[E^2 + H^2] \tag{1.26}$$

が得られる。これは放射場のエネルギーである。これに Fourier 展開 (1.23) を代入すると，ハミルトニアンは，

$$H = \sum_{i=1,2} \int d^3k\, \omega_k [a_{i,k} a_{i,k}^\dagger + a_{i,k}^\dagger a_{i,k}] \tag{1.27}$$

となる。ダガー（$\dagger$）は複素共役の意味である。なお，量子化の準備のために，$a$ と $a^\dagger$ の順序を保つように注意した。明らかに，$a_{i,k}\exp[-i\omega_k t]$ は振動を表わす関数である。

粒子描像と波動描像の関係を明白にするために，振動子変数 $(a_{i,k}, a_{i.k}^\dagger)$ を実変数 $(q_{i,k}, p_{i,k})$ に変えよう：

$$q_{i,k} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left( a_{i,k} e^{-i\omega_k t} + a_{i,k} e^{i\omega_k t} \right) \tag{1.28}$$

$$p_{i,k} = \frac{\sqrt{\omega_k}}{\sqrt{2}i} \left( a_{i,k} e^{-i\omega_k t} - a_{i,k} e^{i\omega_k t} \right). \tag{1.29}$$

すると，

$$\dot{q}_{i,k} = p_{i,k} \tag{1.30}$$

$$\dot{p}_{i,k} = -\omega_k^2 q_{i,k} \tag{1.31}$$

が得られる。これを (1.1), (1.2), (1.3) と比較すると，$(i,\vec{k})$ で指定される放射場のそれぞれの Fourier 振幅は単位質量をもち，ポテンシャル $V_{i,k}=(1/2)\omega_k^2 q_{i,k}^2$

中の1次元粒子として行動し，また，$p_{i,k}$ は $q_{i,k}$ の正準共役運動量であることがみてとれる。たしかに，(1.27) のハミルトニアンは，

$$H = \sum_{i=1,2} \int d^3k \frac{1}{2} [\, p_{i,k}^2 + \omega_k^2 q_{i,k}^2 ] \tag{1.32}$$

となり，振動子ポテンシャル $V_{i,k}$ 中の単位質量をもった粒子の集団のハミルトニアンである。放射場は，数学的には単純な調和振動子の無限個の集団と同等であるといえる。

しかしこれは，場が粒子集団と同等であるということを**意味するわけではない**。なぜなら，$q_{i,k}$ と $p_{i,k}$ には粒子の位置と運動量という概念が与えられておらず，これらは振幅 $a_{i,k}$ と $a_{i,k}^\dagger$ に付随した自由度だからである。量子力学では，位置ベクトルは q 数の位置 $q$ で置き換えられ，したがって，もはや**c 数の位置変数はないのである**。これと違って，場 $\vec{A}$ は c 数の位置座標 $\vec{x}$ に依存する。このことは，空間での波動伝播を記述するうえで重要な意味をもつ。**この空間の位置 $\vec{x}$ は，上記の $q_{i,k}$ とはまったく関連がない**。これは，上に述べた粒子と場の類似性が単なる数学的類似であることを示している；粒子の描像と場の描像には明確な違いがある。まもなく，この事実に関する重要な意味合いを知ることになるだろう。しかしこの数学的な類似性のおかげで，粒子と場の量子化に同じ方法が使えるのである。

量子化に進む前に，ここで電磁気理論に関する補足を述べておいた方がよいだろう。上では純粋に放射場のみ (すなわち， $j_\mu = 0$ ) を扱ったので，$A_0 = 0$ なるゲージを採用できた。変数 $A_0$ を残すと，ラグランジアン密度 $(1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ では，$A_0$ の正準共役量がないことになる。このために，電磁場の量子化が複雑になるのである。なぜなら，量子化は正準理論に基づいているからである。電磁場の正準理論を得る一つの方法は，補助場 $B$ を導入し，ラグランジアンに $\mathcal{L} = B\partial^\mu A_\mu - \alpha B^2$ の項を加えるものである [1, 2, 3, 4]。新しいラグランジアンでは $B$ が $A_0$ の正準共役運動量となり，量子化を実施するための正準理論が復活する。ゲージ場はクォーク（quark）場とともに現代物理の基本的な世界観の根底をなしており，電磁気はその世界観のごく簡単な部分を担っているのである。電磁場の量子化にまつわる上記の複雑さは，これら一般のゲージ場でも存在する。本書の目的はゲージ場の学習ではないし，また，ゲージ場を題材にした多数の良書（たとえば [5]）があるので，これ以上はこの問題は追求しないでおこう。

## 1.3　量子力学と場の量子論

一般向けの科学史によると，量子力学と場の量子論の発展には2段階の量子化（第一および第二量子化）があったことになっている。しかし，物理学上はその発展には一連の量子化規則のみが存在した；同じ量子化規則が，二つの異なる対象（粒子と場）に使われたのである。この量子化の規則では，正準座標 $q$ と正準運動量 $p$ の組に対して，交換関係

$$[q,p] = i\hbar \tag{1.33}$$

を仮定する。ただし，$\hbar$ は Planck 定数を $2\pi$ で割ったものである。この交換関係により，古典的 c 数（すなわち，ふつうの数）の組 $(q,p)$ が q 数（量子演算子）に置き換えられる。すると，$q$ と $p$ で構成されているハミルトニアンや角運動量などの物理量も q 数になる。そこで，線形代数とこれら q 数に対する表現論を応用し，系の状態を Hilbert 空間の状態ベクトルで表現するのである。量子化規則は，複素共役（つまり，ダガー共役）を Hermite 共役と読み替えることも規定している。

この量子化規則を前節で議論した $N$ 粒子の系に適用すると，

$$[q_i^a, p_j^b] = i\hbar\delta_{ij}\delta_{ab} \tag{1.34}$$

となる。ただし，$q_i^a$ は $i$ 番目（$i = 1,2,\cdots,n$）粒子の位置ベクトルの $a$ 番目（$a = 1,2,3$）成分を表わす。$p_j^b$ も同様の意味である。(1.4) のハミルトニアン中の $\vec{x}_i$ を $\vec{q}_i$ で置き換えると，ハミルトニアン $H$ は $\vec{q}_i$ と $\vec{p}_i$ で構成された q 数となる。角運動量 $\sum \vec{q}_i \times \vec{p}_i$ も q 数である。こうして，c 数の位置変数 $\vec{x}_i$ が量子力学から完全に消えた。古典力学では，$\vec{p}_i$ や $\vec{x}_i$（いまは，$\vec{q}_i$ で置き換えている）の時間依存性は，(1.2) と (1.3) の方程式で規定される。交換関係 (1.34) を利用すると，これらの方程式は

$$i\dot{\vec{q}}_i = [\vec{q}_i, H] \tag{1.35}$$

$$i\dot{\vec{p}}_i = [\vec{p}_i, H] \tag{1.36}$$

と書き換えられる。この量子力学では，いかなる演算子 $\mathcal{O}$ も $\vec{q}_i$ と $\vec{p}_i$ で構成されているので，その時間依存性は方程式

$$i\dot{\mathcal{O}} = [\mathcal{O}, H] \tag{1.37}$$

で決まる。

**問 2**　方程式 (1.35) と (1.36) が，(1.2) と (1.3) を与えることを示せ。

放射場の場合には，量子化の規則は，位置ベクトルにではなく，(1.28) と (1.29) の関係式を通じて放射振幅 $(a_{i,k}, a^\dagger_{i,k})$ で表されている正準変数 $(q_{i,k}, p_{i,k})$ に適用される。$\vec{k}$ が三つの連続数で構成されているベクトルであることを考慮して，

$$[q_{i,k}, p_{j,l}] = i\hbar\delta_{ij}\delta^3(\vec{k}-\vec{l}) \tag{1.38}$$

と書く。ただし，$(i,j)$ は放射の二つの偏極を表わす。Dirac のデルタ関数を使っているので，この式の両辺は 2 乗可積分のテスト関数（波束）でならさなければならない。後で示すように，確率の概念によりこの波束の利用が要請される。確率解釈が可能なためには，状態ベクトルのノルムがきちんと定義されている必要がある。(1.28) と (1.29) を交換関係 (1.38) に用いると，振動子演算子 $(a_{i,k}, a^\dagger_{i,k})$ に関する次のような交換関係が導き出せる：

$$[a_{i,k}, a^\dagger_{j,l}] = \delta_{ij}\delta(\vec{k}-\vec{l}). \tag{1.39}$$

ベクトル・ポテンシャル $\vec{A}$ はもはや c 数ではなく，Fourier 展開 (1.23) で表わされる q 数である。振幅 $(a_{i,k}, a^\dagger_{i,k})$ が交換関係 (1.39) を満たす演算子なのである。演算子 $\vec{A}(\vec{x})$ は，いまだに c 数 $\vec{x}$ の関数であることに注目せよ。ハミルトニアンは (1.27) で与えられ，いまでは q 数である。(1.39) の交換関係を用いると，表式 (1.21) を次の形にできる：

$$i\dot{\vec{A}} = [\vec{A}, H] \tag{1.40}$$

$$i\ddot{\vec{A}} = [\dot{\vec{A}}, H]. \tag{1.41}$$

これは，(1.37) のときと同様にあらゆる演算子に拡張できる：

$$i\dot{\mathcal{O}} = [\mathcal{O}, H]. \tag{1.42}$$

ただし，$\mathcal{O}$ は $\vec{A}$ の関数である。

上の考察を通して，量子力学と場の量子論の間の違いが明白になる。量子力学が創られたとき，c 数位置ベクトル $\vec{x}$ と運動量 $\vec{k}$ はそれぞれ演算子 $\vec{q}$ と $\vec{p}$ で置き換えられ，いかなる c 数の空間変数も残されていなかった。与えられた時刻の c 数の変数がないので，量子力学の枠組みではもはや空間的に一様でない古典的物体を作り出す望みはないのである。一方，場の理論の場合には量子化は振幅に施され，位置ベクトル $\vec{x}$ は c 数のままである；演算子 $\vec{A}$ は c 数 $\vec{x}$ に依存する関数である。古典的物体が量子場の系で作られ，量子力学の系では作られないことの本質的な理由がここにある。

さらに量子力学では，正準演算子の数が粒子数と同じであり，したがって，有限個である。一方，量子場は無限個の自由度を携えている。これが，量子力学による物理を場の量子論によるものとまったく違ったものにしているもう一つの要素である。以下の章で，場の量子論における無限自由度の存在により，異なった巨視的な量子状態が無数に生まれることを学ぶ。このことが，ミクロとマクロの物理の間のギャップを小さくするのである。

状況を簡略にして上記のポイントを示すために，以下ではスカラー場 $\varphi(x)$ を用いる。とくに断らないかぎり，$\hbar = c = 1$ なる単位系を用いる。自由場のときその Fourier 展開は，

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \, \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} [a_k e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} + b_k^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)}] \tag{1.43}$$

となる。ただし，振動子演算子 $a_k$ と $b_k$ は，

$$[a_k, a_l^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{l}) \tag{1.44}$$

$$[b_k, b_l^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{l}) \tag{1.45}$$

$$[a_k, b_l^\dagger] = 0 \tag{1.46}$$

を満たす。量子（粒子）エネルギー $\omega_k$ は未定である。スピン自由度や Fermi 統計，Bose 統計を取り込んで上記の考察を一般化するのは簡単である。

ここで，場の量子化を簡単にまとめてみる。まず第一に，同時刻交換関係

$$[\varphi(x), \Pi_\varphi(y)]\delta(t_x - t_y) = i\delta^{(4)}(x - y) \tag{1.47}$$

を思い浮かべよ。ただし，$\Pi_\varphi = \dot{\varphi}^\dagger$ である。

**問 3** Fourier 展開 (1.43) と振動子交換関係 (1.44) を用いて，(1.47) を証明せよ。

自由場 $\varphi$ の満たす方程式は，

$$[\partial_t^2 + \omega^2(-i\vec{\nabla})]\varphi = 0 \tag{1.48}$$

である。$\omega(-i\vec{\nabla})$ は，

$$\omega(-i\vec{\nabla})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \omega_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{1.49}$$

で定義される。ラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = \int d^4x [\dot{\varphi}^\dagger \dot{\varphi} - \varphi^\dagger \omega(-i\vec{\nabla})\varphi] \tag{1.50}$$

で与えられる。$\Pi_\varphi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi}$ であるから，このラグランジアンより $\Pi_\varphi = \dot{\varphi}^\dagger$ が $\varphi$ に対する共役運動量の場であることがわかる。こうして，(1.47) より正準量子化の規則が，振動子演算子ばかりでなく場の演算子にも適用できることがわかる。相対論的な場合には，$\omega_k = \sqrt{k^2+m^2}$ である。$m$ は質量パラメータである。

上記の方法は相互作用している場 $\psi$ にも適用できる。古典場のラグランジアンからはじめ，正準運動量場を決める。そして，(1.47) の形の正準交換関係を仮定する。ラグランジアンからハミルトニアン $H$ も導出する。いかなる演算子の時間微分も (1.42) の関係を満たす。これは，Heisenberg と Pauli が 1929 年に出した量子電磁気学に関する初めての論文で用いた方法である [6, 7]。相互作用がある場合に，Fourier 展開 (1.43) を

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}[a_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + b_k^\dagger(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}] \tag{1.51}$$

と拡張する。相互作用の影響で，$a_k(t)$ の時間依存性は単純な振動子の場合の $\exp[-i\omega_k t]$ よりも複雑になるが，振動子の同時刻交換関係としてはいぜん次のものを課す：

$$[a_k(t), a_l^\dagger(t)] = \delta(\vec{k}-\vec{l}) \tag{1.52}$$

$$[b_k(t), b_l^\dagger(t)] = \delta(\vec{k}-\vec{l}) \tag{1.53}$$

$$[a_k(t), b_l^\dagger(t)] = 0. \tag{1.54}$$

$\psi$ の正準運動量の Fourier 変換は，

$$\Pi_\psi(x) = -i\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\,\frac{\sqrt{\omega_k}}{\sqrt{2}}[b_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a_k^\dagger(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}] \tag{1.55}$$

である。$\psi$ と $\Pi_\psi$ は (1.52) のため (1.47) の形の正準交換関係を満たす。

Fourier 変換 (1.51) の形をもった場は 2 型のスカラー場と呼ばれる。1 型のスカラー場は Fourier 変換

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\,a_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{1.56}$$

で与えられる。$a_k(t)$ は同時刻正準交換関係 (1.52) を満たす。

交換関係 (1.52) を満たす量子場はボソン場である。フェルミオン場の場合には，(1.52) は反交換関係：

$$[a_k(t), a_l^\dagger(t)]_+ = \delta(\vec{k}-\vec{l}) \tag{1.57}$$

に置き換えられる。ただし，記法

$$[A, B]_+ = AB + BA \tag{1.58}$$

を用いた。

他にも多種の場がある。たとえば，Dirac 場，超伝導電子場，Duffin-Kemmer 場などである。場の一般的な記述に関しては，たとえば [4, 8] を参照のこと。本書では多くの場の記述には触れない。それらの場を詳しく知らなくても読めるように書かれている。

## 1.4 c - q 転化条件

前節で，c 数の位置変数 $\vec{x}$ は，量子化の過程を経ても場の量子論での c 数として生き残ることを指摘した。当初,「これは量子理論ではいかなる変化も Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ における変換で誘起される」という基本的要請に反するようにみえた。あらゆる c 数 $c$ とあらゆる変換演算子 $u$ において $u^{-1}cu = c$ であるから，c 数はいかなる変換の下にも不変である。しかしよく考えると，これは矛盾ではなく，さらに精巧な要請の必要性を示唆していることがわかる。この要請はつぎのようにいえる：いかなる c 数の変化も q 数の変化，つまり $\mathcal{H}$ での変換で作り出されるべきである。この要請は c - q 転化条件と呼ばれる [9, 4]。とすると,「$\mathcal{H}$ でのどの変換が，c 数変数 $\vec{x}$ の変化（空間並進）を誘起するのか？」と聞きたくなる。答は，(1.43) にあるスカラー場の Fourier 変換の中の $a_k \exp[i\vec{k}\cdot\vec{x}]$ という組合せに見出せる。演算子

$$\vec{P} = \int d^3k\, \vec{k} a_k^\dagger a_k \tag{1.59}$$

を考えよ。一般公式

$$e^{-A}Be^{A} = B + [B, A] + \frac{1}{2!}[[B, A], A] + \cdots \tag{1.60}$$

を用いると，(1.44) より

$$e^{-i\vec{c}\cdot\vec{P}} a_k e^{i\vec{c}\cdot\vec{P}} = a_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{c}} \tag{1.61}$$

が得られる。$\vec{c}$ は c 数ベクトルである。

**問 4** 関係式 (1.60) を導け。
ヒント：$A$ を $\theta A$ に置き換えて，$\theta$ に関する微分を考えよ。ただし，$\theta$ は c 数の連続パラメータである。

演算子 $\vec{P}$ が演算子 $\vec{a}_k$ の変化を引き起こし，**その結果，空間並進** $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{c}$ **を誘起するのである**。これが空間並進に対する c - q 転化である。このようにして，c - q 転化条件を侵すことなく c 数の空間変数が場の量子論でも生き残り，古典的物体を作る道が開かれるのである。

量子理論では，空間並進を生成する演算子は運動量演算子と呼ばれる。$\vec{P}$ が空間並進を生成するので，全運動量演算子と呼ばれる。

同様の考察を時間並進に適用すると，生成子は

$$H_0 = \int d^3k\, \omega_k a_k^\dagger a_k \tag{1.62}$$

であることがわかる。これは自由スカラー場のハミルトニアンである。前節で指摘したように，このハミルトニアンは自由場のラグランジアンから求めたものと同じである。

c - q 転化条件は c 数の位置変数が生き残るのに決定的な役割を果たし，場の量子論に巨視的な物体を作り出す道を開くのである。後の節で，c 数変数の振舞いを決定するのに c - q 転化条件が重要な役割をしている他の例を調べる。

## 1.5 物質と真空

電磁場の理論の発展過程で，真空とはエーテルと呼ばれる物質で満ちていると仮定されたことがある。この仮定は波動の伝播には媒質が必要であるという信念から生まれた。この媒質がエーテルと呼ばれたのである。エーテルの特質に関する多くの仮定とともに真空は多彩な物質となった。しかしながら，エーテルの静止系という概念は Michelson-Morley の実験と矛盾し，特殊相対論の発展とともに捨て去られたのである。

ところが，場の量子論の発展は，真空が多彩な物質であるという考えを復活させたのである。場の量子論によると，多数の粒子が真空に凝縮して時空に依存した巨視的物体を形成するのである。たとえば，上向きスピンの粒子が凝縮すると，上向き方向に巨視的な磁化を作り出し，真空は強磁性的な物質を演出するのである。

この新しい進展により，エーテルの昔話を思い出し，次のような疑問が湧く；静止系の存在を，いかにして相対論の概念と矛盾なく実現できるのか。この疑問に対する答は，自発的対称性の破れという洗練されたメカニズムにある。このメカニズムは，有名な南部-Goldstone の定理によって説明されている。時空

に依存する巨視的物体が自発的に Lorentz 対称性を破ると，ある種の Goldstone 零エネルギー・モードが現われる。このモードは，Lorentz 不変性を保つための「監視人」として振る舞う。驚いたことに，これらの零エネルギー・モードは量子力学的なモードに現われるのである。このようにして，場の量子論における凝縮のメカニズムは古典的な物体を作り出すばかりでなく，量子力学的なモードをも作り出すのである。これに関しては後の章で説明する。

## 参 考 文 献


[1] N. Nakanishi, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973) 640.

[2] N. Nakanishi, *Prog. Theor. Phys.* **50** (1973) 1388.

[3] B. Lautrup, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Salsk.* **35** (1967) 1.

[4] H. Umezawa, H. Matsumoto, and M. Tachiki, *Thermo Field Dynamics and Condensed States*, (North-Holland, Amsterdam, 1982).

[5] N. Nakanishi and I. Ojima, *Covariant Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity*, (World Scientific, Singapore, 1990).

[6] W. Heisenberg and W. Pauli, *Zeits. f. Phys.* **56** (1929) 1.

[7] W. Heisenberg and W. Pauli, *Zeits. f. Phys.* **59** (1929) 168.

[8] H. Umezawa, *Quantum Field Theory*, (North-Holland, Amsterdam, 1956).

[9] H. Matsumoto, N. J. Papastamatiou, G. Semenoff, and H. Umezawa, *Phys. Rev.* **D24** (1981) 406.

# 2

# 真空相関

## 2.1 数表示

この節では，量子力学と場の量子論との本質的な違いを理解するために，正準変数が有限個である量子力学について調べる。まず，1.2 節で述べた正準演算子と振動子演算子との関係から始めることにする。

いま，

$$[a, a^\dagger] = 1 \tag{2.1}$$

の関係を満たす振動子演算子 $a$ を考えると，演算子

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger) \tag{2.2}$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}i}(a - a^\dagger) \tag{2.3}$$

は次のような正準交換関係

$$[q, p] = i \tag{2.4}$$

を満たす。つまり，正準変数で記述される系は振動子のように振る舞うのである。

個数演算子

$$N = a^\dagger a \tag{2.5}$$

を定義し，その規格直交固有ベクトルを $|n\rangle\rangle$ と記す：

$$N|n\rangle\rangle = n|n\rangle\rangle, \quad \langle\langle n|m\rangle\rangle = \delta_{nm} \tag{2.6}$$

**問 1** $a^\dagger$ が $a$ の Hermite 共役であることを考慮に入れて，$n$ が負にならないことを証明せよ。

**問 2** $a|n\rangle\rangle$ が $N$ の固有ベクトルであり，固有値 $n-1$ をもつことを証明せよ。さらに，$a^\dagger|n\rangle\rangle$ が同じく $N$ の固有ベクトルであり，固有値 $n+1$ をもつことを証明せよ。
ヒント：振動子の交換関係 (2.1) を用いよ。

$n$ は負にはなり得ないので最小値をもつ。その最小固有値に属する $N$ の固有ベクトルを $|0\rangle\rangle$ と記す。$a$ は $n$ を減少させるので，

$$a|0\rangle\rangle = 0 \tag{2.7}$$

となるはずである。これより

$$N|0\rangle\rangle = 0 \tag{2.8}$$

が導かれ，最小固有値が 0 であることを意味している。これは $|n\rangle\rangle$ において $n=0$ とした状態であり，$|0\rangle\rangle$ の記法と一貫している。$|0\rangle\rangle$ は真空とよばれる。

状態 $|0\rangle\rangle$ に $a^\dagger$ を $m$ 回くり返し作用すると，$n=m$ の状態が作り出される。このことから，$n$ は非負の整数であることが証明される。$n$ がしばしば粒子数と解釈されるのはこのためである。状態 $|0\rangle\rangle$ が**真空**と名づけられたのは，粒子数が 0 だからである。$a^\dagger$ は $n$ を 1 ずつ増やすので，生成演算子と呼ばれる。また $a$ は $n$ を 1 ずつ減らすので，消滅演算子と呼ばれる。状態 $|n\rangle\rangle$ は，真空状態 $|0\rangle\rangle$ に $a^\dagger$ を $n$ 回作用して生成される：

$$|n\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle\rangle. \tag{2.9}$$

係数は規格化条件（(2.6) の第 2 式）により決定される。

状態ベクトル空間 $\mathcal{H}$ は，状態ベクトル $\{|n\rangle\rangle\}$ のすべての規格化可能な重ね合せによって構成されている；$\mathcal{H} = \{\sum c_n|n\rangle\rangle : \sum|c_n|^2 < \infty\}$. この空間は，Fock 空間と呼ばれる。そこで，集合 $\{|n\rangle\rangle\}$ を，Fock 空間 $\mathcal{H}$ の基底と呼ぶ。$n$ は非負の整数なので，この基底による表現も数表示と呼ばれる。

記法

$$\Delta A = A - \langle A\rangle \tag{2.10}$$

を導入しよう。ただし，

$$\langle A\rangle = \langle i|A|i\rangle \tag{2.11}$$

であり，$|i\rangle$ は Fock 空間 $\mathcal{H}$ における任意の状態ベクトルである。すると，不確定性原理は，

$$\langle(\Delta p)^2\rangle\langle(\Delta q)^2\rangle \geq (1/4) \tag{2.12}$$

となる。ただし，ここでは $\hbar = 1$ なる単位系を用いている。

## 2.2　コヒーレント状態，スクイーズド状態，熱的状態

### 2.2.1　コヒーレント状態

演算子 $a$ で記述される単一の振動子を考えよう。2.1 節で真空 $|0\rangle\rangle$ を導入した。しかし，**多種の異なった真空が存在する**ので，どの真空を選ぶかという厄介な問題がある。

この問題を理解するために，もう一度 1.3 節で述べた量子電磁気学を思い出そう。そこでわかったように，放射場は光子の集まりである。しかし，量子電磁気学の現象には，光子の状態ばかりでなく，古典的放射のさまざまな巨視的形態が見られる。「それでは，いかにして量子電磁気学から巨視的な放射波が得られるか？」という疑問がわいてくる。直観的には，これらの巨視的放射は，多数の光子が凝縮することによって形成されるのであろうと考えられる。このことから，これらの巨視的状態は粒子数の固有状態ではなく，粒子数に大きな不確定性をもった状態であることが推測される。

これは，過去に多数の物理学者の興味を引いた，位相と粒子数にかかわる問題を思い出させる。この問題は,「位相と光子数とが互いに正準共役であるだろう」という予想から生じた。まず，そのような予想に至らせた理由をざっと考察することから始めよう。1 個の光子の波動関数を $\varphi(x)$ と書く。すると，$n$ 個の光子の波動関数は積 $\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)$ で与えられる。各光子の波動関数が位相因子 $\exp[i\theta]$ をもつとすると，$n$ 光子波動関数の位相因子は $\exp[in\theta]$ になる。したがって，$n$ 光子波動関数に演算子 $-i\partial/\partial\theta$ を作用することは，ちょうど波動関数を光子数倍（$n$ 倍）することになる。このことより，$n$（$\theta$ 表示において $= -i\partial/\partial\theta$）は $\theta$ の正準共役運動量であることがわかる。同様な議論は，表式

$$e^{-i\theta N} a e^{i\theta N} = e^{i\theta} a \tag{2.13}$$

によっても与えられる。ただし，

$$N = a^\dagger a \tag{2.14}$$

は個数演算子である。これを見ると，$N$ が位相変化を引き起こしていることがわかり，粒子数が位相の正準共役であることが示唆される。このことは，運動量が空間移動の生成子であることを思い出すとよくわかる。もし，この予想が正しければ，不確定性関係

$$\Delta\theta\Delta n \geq \frac{\hbar}{2} \tag{2.15}$$

が得られるはずである。これは，位相が特定されると，光子数は完全に不確定となることを意味している；レーザー波のような特定の位相をもった放射波をつくるためには，多数の光子が必要である。位相は演算子として定義されていないので，数学的にこの議論を定式化することは残念ながら困難である。しかし通常の量子力学には，時間演算子がないのにもかかわらず時間・エネルギー不確定性関係があることを思い出せば，上記の位相・粒子数の不確定性関係がまったく無意味とはいえない。位相演算子の発見は多数の物理学者によって試みられた。たとえば，[1, 2, 3, 4, 5, 6] を見よ。位相や時間の演算子を定義するのが困難である理由は，粒子数やエネルギー・スペクトルが非負で下限があるためである。この状況は，固有値スペクトルに下限のない位置や運動量の場合とは決定的に異なっている。この章の最後の節で，[6] にある，番の論文に従ってこの問題の一つのとらえ方を説明する。

さて，ボソン凝縮 (boson condensation) のメカニズムを通して，多数の光子を含んだ巨視的放射状態を調べよう。この状態を $|0\rangle$ と記す。これが $a$ 演算子の真空 $|0\rangle\rangle$ と異なることは，$a|0\rangle$ が 0 ではないことから明らかである。しかし，$\alpha|0\rangle = 0$ と $[\alpha, \alpha^\dagger] = 1$ の関係を満たす演算子 $\alpha$ を捜せるかもしれない。もしそのような $\alpha$ が見つかったとすると，状態 $|0\rangle$ は $\alpha$ 振動子の真空（それが多くの $a$ 量子を含んでいるのにもかかわらず真空と呼ぶ）であるといえるだろう。以下に，そのような $\alpha$ の例を示そう。たとえば，レーザー出力のように位相が決まった波動に適した真空は，多数の光子が凝縮してできた真空なのである。この例は，粒子凝縮が真空をいかに変化されるのかを示している。このように，多種類の真空が存在するのである。

この小節で扱っているコヒーレント状態は，粒子凝縮で形成される真空としてよく知られている。

2.1 節と同様に，$a$ の真空を $|0\rangle\rangle$ と記す：

$$a|0\rangle\rangle = 0. \tag{2.16}$$

ここで，変換

$$a \rightarrow \alpha(\theta) = a + \theta \tag{2.17}$$

を行う。ただし，$\theta$ は c 数である。これは，ボソン変位，あるいはコヒーレント状態への Bogoliubov 変換と呼ばれる。$\alpha(\theta)$ の真空を $|0(\theta)\rangle$ と記す：

$$\alpha(\theta)|0(\theta)\rangle = 0. \tag{2.18}$$

これより

$$a|0(\theta)\rangle = -\theta|0(\theta)\rangle \tag{2.19}$$

を得る。状態 $|0(\theta)\rangle$ は，固有値 $-\theta$ に属する $a$ のコヒーレント状態と呼ばれる [7]。

さて，

$$U_c(\theta) = \exp[iG_c(\theta)] \tag{2.20}$$

を導入すると，

$$\alpha(\theta) = U_c(\theta)aU_c^{-1}(\theta) \tag{2.21}$$

と表わせる。ただし，生成子 $G_c(\theta)$ は

$$G_c(\theta) = -i(\theta^* a - \theta a^\dagger) \tag{2.22}$$

で与えられる。(1.60) を用いると，(2.21) はボゾン変位 (2.17) を与えることが確かめられる。以上より，

$$|0(\theta)\rangle = U_c(\theta)|0\rangle\rangle \tag{2.23}$$

であることがわかる。$U_c(\theta)$ は

$$U_c(\theta) = \exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right)\exp\left(-\theta a^\dagger\right)\exp\left(\theta^* a\right) \tag{2.24}$$

と書き換えられる。

**問 3**　式 (2.24) を導け。
ヒント：

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[U_c(\theta)e^{-\theta^* a}\right] = -U_c(\theta)e^{-\theta^* a}\frac{\partial}{\partial\rho}[\theta a^\dagger + \frac{1}{2}\rho^2] \tag{2.25}$$

を証明せよ。ただし，$\rho$ は $|\theta|$ である。

さて，(2.23) と (2.24) から

$$|0(\theta)\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right)\exp\left(-\theta a^\dagger\right)|0\rangle\rangle \tag{2.26}$$

が得られる。このことは，$\alpha$ の真空状態 $|0(\theta)\rangle$ が，多数の $a$ 粒子を含んだ状態の重ね合せであることを意味している。これが，$a$ 粒子の**凝縮**の一例である。$|0\rangle\rangle$ に $a^\dagger$ のべき乗を作用して $a$ の Fock 空間（$\mathcal{H}(a)$ と記す）を構築したのと同様にして，$|0(\theta)\rangle$ に $\alpha^\dagger(\theta)$ を循環的に作用することにより Fock 空間 $\mathcal{H}(\theta)$ が構築される。$\mathcal{H}(a)$ に属するすべてのベクトルは $\mathcal{H}(\theta)$ に属するベクトルの重ね合せである。また，その逆もいえるので **$\mathcal{H}(a)$ と $\mathcal{H}(\theta)$ は同値である**ことがわかる。このようにして，パラメータ化された Fock 空間 $\mathcal{H}(\theta)$ が得られる。そこでは，$\theta$ が異なっていても，それらのパラメータによって特徴づけられる空間は互いに同値である。**コヒーレント状態では，不確定関係は**

$$\langle(\Delta p)^2\rangle\langle(\Delta q)^2\rangle = (1/4) \tag{2.27}$$

**となる。**

### 2.2.2 スクイーズド状態

非常に正確にその位置が測定できるので，きわめてサイズの小さい放射波束は多く用いられる。その一例として，微弱な重力波の観測がある。波束が，

$$\langle(\Delta p)^2\rangle \le \frac{1}{2} \tag{2.28}$$

か，

$$\langle(\Delta q)^2\rangle \le \frac{1}{2} \tag{2.29}$$

のいずれかの性質をもつとき，その波をスクイーズド波と呼ぶ。この小節で，スクイーズド波の真空状態の構造を調べる。

$a^2$ と $a^{\dagger 2}$ からなる双一次の生成子を考える：

$$G_s = i\frac{1}{2}[a^2 - a^{\dagger 2}]. \tag{2.30}$$

実パラメータ $\theta$ を含んだ

$$U_s(\theta) = \exp[i\theta G_s] \tag{2.31}$$

を定義すると，変換

$$\alpha(\theta) = U_s(\theta) a U_s^{-1}(\theta) \tag{2.32}$$

$$\alpha^\dagger(\theta) = U_s(\theta) a^\dagger U_s^{-1}(\theta) \tag{2.33}$$

が得られ，これは

$$\alpha(\theta) = ca - da^\dagger \tag{2.34}$$

$$\alpha^\dagger(\theta) = ca^\dagger - da \tag{2.35}$$

となる。ただし，実パラメータ $c$ と $d$ はそれぞれ $c = \cosh\theta$ と $d = \sinh\theta$ である。この変換は，スクイーズド状態への Bogoliubov 変換と呼ばれる。この変換の下で交換関係は不変である。

$\alpha(\theta)$ の真空を $|0(\theta)\rangle$ と記す：$\alpha(\theta)|0(\theta)\rangle = 0$．これより $|0(\theta)\rangle = U_s(\theta)|0\rangle\rangle$ となり

$$|0(\theta)\rangle = \exp[-\frac{1}{2}\ln\cosh\theta]\exp[\frac{1}{2}a^{\dagger 2}\tanh\theta]|0\rangle\rangle \tag{2.36}$$

が得られる。

**問 4** (2.36) を導け。
ヒント：

$$f_n = \langle\langle 0|a^{2n}U_s(\theta)|0\rangle\rangle \tag{2.37}$$

を定義し，微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial\theta}f_n = -\frac{1}{2}f_{n+1} + n(2n-1)f_{n-1} \tag{2.38}$$

を導け。この方程式の解は

$$f_n = C_n e^{-(1/2)\ln\cosh\theta}(\tanh\theta)^n \tag{2.39}$$

である。ただし，$C_n = C_0[(2n-1)!/(n-1)!](1/2^n)$.

関係 (2.36) は，$\alpha$ の真空状態 $|0(\theta)\rangle$ が，$a$ 粒子を偶数個含んだ状態の重ね合せであることを意味している。これは，$a$ 粒子の凝縮のもう一つの例である。$\mathcal{H}(a)$ に属するすべてのベクトルは，$\mathcal{H}(\theta)$ に属するベクトルの重ね合せである。また，その逆もいえるので，$\mathcal{H}(a)$ と $\mathcal{H}(\theta)$ が同値であることがわかる。$\mathcal{H}(\theta)$ は $|0(\theta)\rangle$ に $\alpha(\theta)^\dagger$ のべき乗を作用させてできる Fock 空間である。このようにして，またパラメータ化された Fock 空間 $\mathcal{H}(\theta)$ が得られた。そこでは $\theta$ が異なっていても，それらのパラメータによって特徴づけられる空間は互いに同値である。

関係式 (2.2) と (2.3) により正準演算子 $(q, p)$ を導入し，関係式 (2.10) と (2.11) をスクイーズド状態である $i$ 状態（すなわち，$\alpha$ 真空）に対して用いると，この状態における不確定性が計算できる。それは，

$$\langle(\Delta q)^2\rangle = (1/2)(c+d)^2 \tag{2.40}$$

$$\langle(\Delta p)^2\rangle = (1/2)(c-d)^2 \tag{2.41}$$

となる。

**問 5** 関係式 (2.40) と (2.41) を導け。
ヒント：関係式 (2.34) と (2.35) を用いよ。

以上の結果から，**スクイーズド状態では，不確定関係は，**

$$\langle(\Delta p)^2\rangle\langle(\Delta q)^2\rangle = 1/4 \tag{2.42}$$

**となる**ことがわかる。$c$ と $d$ は $\theta$ が増すと無限大へと増大するので，$\theta$ を正の大きい数にとることによって $\langle(\Delta p)^2\rangle$ をいくらでも小さくすることができる。一方，負の $\theta$ を用いて，$\langle(\Delta q)^2\rangle$ をいくらでも小さくすることもできる。スクイーズド（しぼった）状態という名がついたのはこのことに由来している。

### 2.2.3 2モード・スクイーズド状態

前の小節で1モード・スクイーズド状態について調べた。この小節では，2モード・スクイーズド状態について解析する。

2種類の可換な振動子 $a$ と $\tilde{a}$：

$$[a, a^\dagger] = [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1 \tag{2.43}$$

$$[a, \tilde{a}] = [a, \tilde{a}^\dagger] = 0 \tag{2.44}$$

により構成された生成子

$$G_B = i[a\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger a^\dagger] \tag{2.45}$$

を導入し，$U_B(\theta) = \exp[i\theta G_B]$ を定義すると，実パラメータ $\theta$ を含む変換

$$\alpha(\theta) = U_B(\theta) a U_B^{-1}(\theta) \tag{2.46}$$

$$\tilde{\alpha}(\theta) = U_B(\theta) \tilde{a} U_B^{-1}(\theta) \tag{2.47}$$

は

$$\alpha(\theta) = ca - d\tilde{a}^\dagger \tag{2.48}$$

$$\tilde{\alpha}(\theta) = c\tilde{a} - da^\dagger \tag{2.49}$$

となる。ただし，c 数パラメータ $c$ と $d$ は，それぞれ $c = \cosh\theta$ と $d = \sinh\theta$ で与えられる。これは，2モード・スクイーズド状態への Bogoliubov 変換と呼ばれる [8, 9, 10, 11, 12, 13]。この変換の下で交換関係は不変である。ただし，

$$c^2 - d^2 = 1 \tag{2.50}$$

であることに注意せよ。(2.48) と (2.49) は

$$\begin{bmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{bmatrix}^\mu = B^{-1}(\theta)^{\mu\nu} \begin{bmatrix} \alpha(\theta) \\ \tilde{\alpha}^\dagger(\theta) \end{bmatrix}^\nu \tag{2.51}$$

$$[a^\dagger, -\tilde{a}]^\mu = [\alpha^\dagger(\theta), -\tilde{\alpha}(\theta)]^\nu B(\theta)^{\nu\mu} \tag{2.52}$$

の形に書き換えられる。ただし，Bogoliubov 行列 $B(\theta)$ は

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} c & -d \\ -d & c \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

で与えられる。関係

$$B^{-1}(\theta) = \tau_3 B(\theta) \tau_3 \tag{2.54}$$

が容易に証明される。ただし，Pauli 行列 $\tau_i;\ i = 1, 2, 3$ を用いており，

$$\tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

である。

簡単のため，

$$a^\mu:\ a^1 = a,\ a^2 = \tilde{a}^\dagger \tag{2.56}$$

$$\bar{a}^\mu:\ \bar{a}^1 = a^\dagger,\ \bar{a}^2 = -\tilde{a} \tag{2.57}$$

$$\alpha(\theta)^\mu : \alpha(\theta)^1 = \alpha(\theta),\ \alpha(\theta)^2 = \tilde{\alpha}^\dagger(\theta) \tag{2.58}$$

$$\bar{\alpha}(\theta)^\mu : \bar{\alpha}(\theta)^1 = \alpha^\dagger(\theta),\ \bar{\alpha}(\theta)^2 = -\tilde{\alpha}(\theta) \tag{2.59}$$

なる二重項表記を採用する。これを用いると，上記の変換は，

$$a^\mu = B^{-1}(\theta)^{\mu\nu} \alpha(\theta)^\nu \tag{2.60}$$

$$\bar{a}^\mu = \bar{\alpha}(\theta)^\nu B(\theta)^{\nu\mu} \tag{2.61}$$

と表わされる。

$(a, \tilde{a})$ の真空を $|0\rangle\rangle$ と記し，$(\alpha(\theta), \tilde{\alpha}(\theta))$ の真空を $|0(\theta)\rangle$ と記す：

$$a|0\rangle\rangle = \tilde{a}|0\rangle\rangle = 0 \tag{2.62}$$

$$\alpha(\theta)|0(\theta)\rangle = \tilde{\alpha}(\theta)|0(\theta)\rangle = 0. \tag{2.63}$$

すると，$|0(\theta)\rangle = U_B(\theta)|0\rangle\rangle$ となり

$$|0(\theta)\rangle = \exp\left[-\ln\cosh\theta\right] \exp\left[a^\dagger \tilde{a}^\dagger \tanh\theta\right] |0\rangle\rangle \tag{2.64}$$

を得る。

**問 6** (2.64) を導け。

ヒント：

$$f_n = \langle\langle 0|[a\tilde{a}]^n U_B(\theta)|0\rangle\rangle \tag{2.65}$$

を定義して，微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial\theta} f_n = -f_{n+1} + n^2 f_{n-1} \tag{2.66}$$

を導け。その解は

$$f_n = C_n e^{-\ln\cosh\theta}(\tanh\theta)^n \tag{2.67}$$

である。ただし，$C_n = n!C_0$ とおいた。

(2.64) は，$|0(\theta)\rangle$ の中に $(a\tilde{a})$ **対が凝縮していること**を示している。状態 $|0(\theta)\rangle$ は $(a,\tilde{a})$ の 2 モード・スクイーズド状態と呼ばれる。

$|0\rangle\rangle$ に $a^\dagger$ と $\tilde{a}^\dagger$ のべき乗を作用して $(a,\tilde{a})$ Fock 空間（$\mathcal{H}(a,\tilde{a})$ と記される）を構築することができる。他方，$|0(\theta)\rangle$ に $\alpha^\dagger(\theta)$ と $\tilde{\alpha}^\dagger(\theta)$ を作用することによって Fock 空間 $\mathcal{H}(\theta)$ が得られる。このことから，$\mathcal{H}(a,\tilde{a})$ と $\mathcal{H}(\theta)$ が同値であり，それによりパラメータ化された Fock 空間 $\mathcal{H}(\theta)$ が同値集合を形成することがわかる。

$\alpha(\theta)$ 真空が $a\tilde{a}$ 対の凝縮を含んだ状態であるので，それらは $a$ と $\tilde{a}$ の交換のもとで不変である。この交換は チルダ共役と呼ばれる。そこで，真空はチルダ共役の下で不変であるということができる：

$$\langle 0(\theta)|^{\sim} = \langle 0(\theta)|, \quad |0(\theta)\rangle^{\sim} = |0(\theta)\rangle. \tag{2.68}$$

$n \equiv \langle 0(\theta)|a^\dagger a|0(\theta)\rangle$ と $\tilde{n} \equiv \langle 0(\theta)|\tilde{a}^\dagger\tilde{a}|0(\theta)\rangle$ で個数パラメータを導入すると，

$$n = \tilde{n} = d^2 \tag{2.69}$$

が得られる。これによって，パラメータ $d = \sinh\theta$ が個数パラメータ $n$ を用いて表わせる。したがって，行列 $B$ は個数パラメータによって性格づけられるのである。

**問 7** (2.69) を導け。
ヒント：関係 (2.48) と (2.49) を用いよ。

不確定性関係の解析によって，二つの振動子間に相関を誘起する精巧なメカニズムが明らかになった。2 モード・スクイーズド状態が，量子真空のもつ可能性に関する一つの視点（熱的効果とたいへん関係のある）を提供していることが明らかになったであろう。このために，2 モード・スクイーズド Bogoliubov 変換は熱的 Bogoliubov 変換とも呼ばれるのである。これは，Thermo Field Dynamics

（TFD）と呼ばれる熱現象を扱う場の理論の構築に決定的な役割を果たす。そこで，以下の節でも 2 モード・スクイーズド変換についての議論を続ける。

### 2.2.4　同 値 定 理

振動子演算子に関しての 2 次以下の可能なすべての生成子を調べると，真空を変質させるいかなる変換も，上で用いた 3 種類の変換の積から作り上げられることがわかる；2 モード・スクイーズド（あるいは熱的な）変換，1 モード・スクイーズド変換，コヒーレント状態変換である。これらにより，量子光学におけるいわゆる熱的コヒーレント・スクイーズド状態を含む一般的な問題を取り扱うための基本的手法が得られる。

この節を終えるにあたって，きわめて重要な注意をしておく。この節であげた例は，一般的にいわれていること，つまり「**有限**個の正準演算子の組で構成される規格化可能なすべての状態ベクトル空間は，同値である」を表わしている。これは,「ある空間におけるすべてのベクトルが，別のベクトル空間できちんと定義されたベクトルの和として表現できる」ということなのである。つまり，**すべての Fock 空間が同値なので，実用的にはただ 1 つの Fock 空間を考えればよいこと**を意味している。

## 2.3　純粋状態における雑音

### 2.3.1　2 モード状態における熱雑音

この節では，ボソン系における Bogoliubov 変換 (2.48) と (2.49) によって純粋状態に雑音が生じることを示す [13]。

まず (2.2) と (2.3) を用いて，振動子変数から正準変数に移る：

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger), \quad p= \frac{1}{\sqrt{2}i}(a - a^\dagger) \tag{2.70}$$

$$\tilde{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{a} + \tilde{a}^\dagger), \quad \tilde{p}= -\frac{1}{\sqrt{2}i}(\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger) \tag{2.71}$$

$$q(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha(\theta) + \alpha^\dagger(\theta)\right), \quad p(\theta)= \frac{1}{\sqrt{2}i}\left(\alpha(\theta) - \alpha^\dagger(\theta)\right) \tag{2.72}$$

$$\tilde{q}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\alpha}(\theta) + \tilde{\alpha}^\dagger(\theta)\right), \quad \tilde{p}(\theta)= -\frac{1}{\sqrt{2}i}\left(\tilde{\alpha}(\theta) - \tilde{\alpha}^\dagger(\theta)\right) \tag{2.73}$$

ただし，$(q, p, \tilde{q}, \tilde{p})$ は $(q(\theta), p(\theta), \tilde{q}(\theta), \tilde{p}(\theta))$ で $\theta = 0$ とおいたものである。前

節で定義したチルダ共役を思い出そう；チルダ共役は $a$ と $\tilde{a}$ を入れ換える。ここでは一般化されたチルダ共役を用いる；それは，$\tilde{A}$ と $A$ の間の関係を求める際，$a$ と $\tilde{a}$ の交換の他に虚数単位 $i$ と $-i$ の置き換えを行うというものである。

チルダ共役をとる際に，c 数の複素共役をとるという規則をあらたに加えたのである。すぐわかるように，この新しいチルダ共役の規則は，Bogoliubov 変換の形を保存するので便利である。この定義により正準交換関係：

$$[q, p] \quad = -[\tilde{q}, \tilde{p}] \quad = i \tag{2.74}$$

$$[q(\theta), p(\theta)] = -[\tilde{q}(\theta), \tilde{p}(\theta)] = i \tag{2.75}$$

が証明できる。ただし，チルダ共役をとる際，c 数に対する規則を考慮している。これらの関係よりチルダ運動量は，$\tilde{p}$ ではなくて $(-\tilde{p})$ であることがわかる。(2.51)，(2.52)，(2.70)，(2.71)，(2.72) ならびに (2.73) から得られる単純な線形関係を用いて，再び Bogoliubov 変換

$$\begin{bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{bmatrix}^{\mu} = B^{-1}(\theta)^{\mu\nu} \begin{bmatrix} q(\theta) \\ \tilde{q}(\theta) \end{bmatrix}^{\nu}, \quad \begin{bmatrix} p \\ \tilde{p} \end{bmatrix}^{\mu} = B^{-1}(\theta)^{\mu\nu} \begin{bmatrix} p(\theta) \\ \tilde{p}(\theta) \end{bmatrix}^{\nu} \tag{2.76}$$

を導くことができる。なお，上述の正準演算子の定義で，もし c 数に対するチルダ共役規則を考慮しなかったなら，この正準演算子の Bogoliubov 変換は得られないであろう。

**問 8** (2.76) を証明せよ。
ヒント：振動子演算子への Bogoliubov 変換 (2.51)，(2.52) と振動子演算子による正準演算子の定義を用いよ。

二重項表記 $(q^1 = q, q^2 = \tilde{q})$，$(p^1 = p, p^2 = \tilde{p})$，$(q^1(\theta) = q(\theta), q^2(\theta) = \tilde{q}(\theta))$，$(p^1(\theta) = p, p^2(\theta) = \tilde{p}(\theta))$ を用いると，(2.76) は

$$q^{\mu} = B^{-1}(\theta)^{\mu\nu} q(\theta)^{\nu}, \quad p^{\mu} = B^{-1}(\theta)^{\mu\nu} p(\theta)^{\nu} \tag{2.77}$$

となる。

一方，(2.53) が満たす (2.54) は

$$B^{-1}(\theta)\tau_3 B^{-1}(\theta) = \tau_3 \tag{2.78}$$

と変形できる。したがって，Bogoliubov 変換の下で：

$$I \equiv \langle q^{\mu} q^{\nu} \rangle \tau_{3\mu\sigma} \tau_{3\nu\rho} \langle p^{\sigma} p^{\rho} \rangle \tag{2.79}$$

は不変である。ただし，任意の状態 $|i\rangle$ に関して，$\langle A\rangle = \langle i|A|i\rangle$ とおいた。Bogoliubov 変換 (2.77) は線形なので，$(\Delta q^\mu, \Delta p^\mu, \Delta q(\theta)^\mu, \Delta p(\theta)^\mu)$ に対しても同様の変換が得られる。ただし，$\Delta A = A - \langle A\rangle$ である。(2.79) 中の $I$ で $q$ などを $\Delta q$ などで置き換えると，表式

$$\langle \Delta q^\mu \Delta q^\nu\rangle \tau_{3\mu\sigma}\tau_{3\nu\rho}\langle \Delta p^\sigma \Delta p^\rho\rangle = \langle \Delta q(\theta)^\mu \Delta q(\theta)^\nu\rangle \tau_{3\mu\sigma}\tau_{3\nu\rho}\langle \Delta p(\theta)^\sigma \Delta p(\theta)^\rho\rangle \tag{2.80}$$

が得られる。これは，

$$\begin{aligned}\langle(\Delta p)^2\rangle\langle(\Delta q)^2\rangle + \langle(\Delta\tilde{p})^2\rangle\langle(\Delta\tilde{q})^2\rangle - 2\langle\Delta p\Delta\tilde{p}\rangle\langle\Delta q\Delta\tilde{q}\rangle \\ = \langle(\Delta p(\theta))^2\rangle\langle(\Delta q(\theta))^2\rangle + \langle(\Delta\tilde{p}(\theta))^2\rangle\langle(\Delta\tilde{q}(\theta))^2\rangle \\ -2\langle\Delta p(\theta)\Delta\tilde{p}(\theta)\rangle\langle\Delta q(\theta)\Delta\tilde{q}(\theta)\rangle\end{aligned} \tag{2.81}$$

となる。

さて，次の性質をもつ状態 $|i\rangle$ のみを考慮することにしよう：

(a)　各状態 $|i\rangle$ は，$\alpha^\dagger(\theta)$ のべき乗や $\tilde{\alpha}^\dagger(\theta)$ のべき乗を $|0(\theta)\rangle$ に作用したものである。

(b)　それらはチルダ共役の下で不変である：

$$|i\rangle = |i\rangle^\sim, \qquad \langle i| = \langle i|^\sim. \tag{2.82}$$

状態 $|i\rangle$ に関する不確定性関係を導くが，$\alpha(\theta)$ 真空に関する不確定性関係に特に興味がある。なお，$\alpha(\theta)$ の真空 $|0(\theta)\rangle$ は，状態 $|i\rangle$ の一つである。

c 数のチルダ共役は複素共役であり，Hermite 演算子の期待値が実数なので，$\langle q\rangle = \langle\tilde{q}\rangle$，$\langle q^2\rangle = \langle\tilde{q}^2\rangle$ 等が得られる。そこで状態 $|i\rangle$ の性質 (a) を用いると，

$$\langle\Delta q(\theta)\Delta\tilde{q}(\theta)\rangle = \langle\Delta q(\theta)\rangle\langle\Delta\tilde{q}(\theta)\rangle = 0 \tag{2.83}$$

$$\langle\Delta p(\theta)\Delta\tilde{p}(\theta)\rangle = \langle\Delta p(\theta)\rangle\langle\Delta\tilde{p}(\theta)\rangle = 0 \tag{2.84}$$

となる。よく知られた不確定性関係 (2.12) は，$\Delta p(\theta)$ と $\Delta q(\theta)$ も満たしている：

$$\langle(\Delta q(\theta))^2\rangle\langle(\Delta p(\theta))^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}. \tag{2.85}$$

ただし，いま用いている単位系では 1 であるが，ここでは混乱を避けるために，陽に $\hbar$ を記すことにした。さて，(2.81) は

$$\langle(\Delta q)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} + \langle\Delta q\Delta\tilde{q}\rangle\langle\Delta p\Delta\tilde{p}\rangle \tag{2.86}$$

となる。これは状態 $|i\rangle$ についての不確定性関係である。右辺の第1項は，通常の量子ゆらぎを表わしている。つまり，この関係により，状態 $|i\rangle$ のゆらぎは第2項の分だけ増大していることがわかる。$|i\rangle$ として $\alpha$ の真空 $|0(\theta)\rangle$ を採用すると，第2項は

$$\langle \varDelta q \varDelta \tilde{q} \rangle \langle \varDelta p \varDelta \tilde{p} \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \sinh^2 2\theta \tag{2.87}$$

となる。これより，2モード・スクイーズド状態は，純粋状態であるにもかかわらず雑音を含んでいることがわかる。

この節での考察の重要な点は，**いかなるボソン粒子の Bogoliubov 変換も純粋状態に雑音を生成する**ということである；ボソンに対する Bogoliubov 変換が同一であれば，**その変換の原因によらず**同じ量の雑音が生成されるのである。次の節で，この雑音が熱雑音であることを知る。そのため，この Bogoliubov 変換は，熱的 Bogoliubov 変換と呼ばれる。

$\langle \varDelta q \varDelta \tilde{q} \rangle$ と $\langle \varDelta p \varDelta \tilde{p} \rangle$ が $\hbar$ に比例しているので，熱的ゆらぎもまた量子的起源をもつようにみえることに注目せよ。後の節で量子場の系における巨視的物体の多様性を導く際に，この熱雑音がいかにして巨視的となり得るかを見る。

### 2.3.2 真空を通じての相関

議論を具体的にするために，量子光学における簡単なモデルを考えることにしよう。前節で導出した二つの組の振動子演算子で記述される，二つの独立な光入力モードを考える；$(a, a^\dagger)$ と $(\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger)$ (図1を見よ)

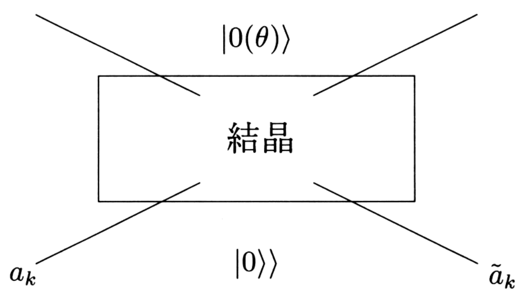



図 1. 二つの光線は結晶体を通じてその真空を変化させ，その結果，真空を通じての熱相関が生まれる。

これらのモードが，固体を通じて短時間相互作用したと仮定する。相互作用する前には，系の真空は演算子 $a$ と $\tilde{a}$ によって消去される $|0\rangle\rangle$ である。結晶中の相互作用が (2.48)，(2.49) の Bogoliubov 変換で表わされるとすると，真空は $|0(\theta)\rangle$ になる。つまり，二つの波が結晶を出ていくときの状態は $|0(\theta)\rangle$ である。この時刻を $t^1$ とする。また，波が結晶に入ってくる時刻を $t^0$ と記す。全ハミルトニアンが

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}(t) \tag{2.88}$$

で与えられる系を考えている。ただし，$\hat{H}_0$ は自由ハミルトニアン

$$\hat{H}_0 = \omega a^\dagger a + \omega' \tilde{a}^\dagger \tilde{a} \tag{2.89}$$

であり，$\hat{H}_{int}(t)$ は結晶が仲介している $a$ と $\tilde{a}$ の間の相互作用である。この相互作用が Bogoliubov 変換を引き起こすと仮定すると，その形は $g(t)G_B$ となる。ただし，$g(t)$ は，$t > t_1$ や $t < t_0$ では $g(t) = 0$ となるような時間に依存する結合定数である [14]。Bogoliubov パラメータ $\theta$ は，結合定数 $g(t)$ によって決まる。Bogoliubov 変換は，(2.48)，(2.49) に従って，組 $(a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger)$ を組 $(\alpha(\theta), \alpha^\dagger(\theta), \tilde{\alpha}(\theta), \tilde{\alpha}^\dagger(\theta))$ に写す。(2.64) からわかるように，$|0(\theta)\rangle$ は $a^\dagger\tilde{a}^\dagger$ 対を含むので，この状態は $\omega + \omega' = 0$ でないかぎり時間に依存する。なぜなら，対の項は時間とともに，$\exp[i(\omega + \omega')(t - t_1)]a^\dagger\tilde{a}^\dagger$ に従って変化するからである；終状態の真空は対が振動している状態である。

このメカニズムの特筆すべき点は，二つの系が真空 $|0(\theta)\rangle$ を共有していることの結果として，$\tilde{a}$ に起因する雑音の影響が $a$ の測定結果に現われるという点である。相互作用後は $a$ の系と $\tilde{a}$ の系が空間的に分離され互いに相互作用をすることがないという事実（つまり，$g(t) = 0$）にもかかわらず，こうなるのである。

この雑音がどこから生じるのかを知るためには，真空 $|0(\theta)\rangle$ は $a\tilde{a}$ 対を形成する裸の粒子が凝縮した状態であるということを思い出せばよい。この真空中のすべての $a$ 量子は，$\tilde{a}$ 量子を随伴しているのである。そのため $a$ 量子と $\tilde{a}$ 量子は互いに**相関**をもっており，その結果，$a$ のみに関連した観測量の測定にも $a$ 系だけでは制御できない効果，つまり，雑音がともなうのである。

上では，(2.86) の不確定性関係を通して雑音効果をみてきた。この雑音効果は，裸の粒子の Wigner 関数を展開することによっても見出されている [15, 12]。

## 2.4 純粋状態と混合状態

### 2.4.1 ボ ソ ン 系

2.3 節で，Bogoliubov 変換により純粋状態に雑音が生成されることがわかった。これは，驚くべきことである。というのは通常，混合状態においてのみ雑音が生成されると思われているからである。この節では，Bogoliubov 変換によって生成されたのと同じ雑音が，混合状態に関する統計平均によっても得られることを示す。すると，Bogoliubov 変換によって生成された純粋状態の雑音が，真に熱雑音であることが完全に示されたことになる。これを確かめるために，再び二つの振動子 $a$ と $\tilde{a}$ を考える。$a^\dagger a$ と $\tilde{a}^\dagger\tilde{a}$ の固有値をそれぞれ $m$ と $\tilde{m}$ で表わす（$\tilde{m}$ は $\tilde{a}^\dagger\tilde{a}$ の固有値 $m$ を意味していることに注意せよ；$\tilde{m}$ のチルダ記号はこの固有値が $\tilde{a}$ 系に属していることを示し，チルダ記号の下にある数字が固有値を与える。たとえば，$m$ と $\tilde{m}$ の両方とも固有値 $m$ を意味している；前者が非チルダ振動子に属し，後者はチルダ振動子に属している）。さて，二つの振動子の張る Hilbert 空間の基底として，固有ベクトル $|m,\tilde{m}'\rangle$ を採用する。ここで，

$$|0\rangle = c_1 \sum_{m=0}^{\infty} \rho^\alpha |m,\tilde{m}\rangle \tag{2.90}$$

$$\langle 0| = c_2 \sum_{m=0}^{\infty} \langle m,\tilde{m}|\rho^{1-\alpha} \tag{2.91}$$

により定義される，2 倍にした空間における純粋状態を考える。ただし，$\alpha$ は任意の実定数であり，$c_1$ と $c_2$ は

$$\langle 0|0\rangle = 1 \tag{2.92}$$

で決まる規格化定数である。演算子 $\rho$ は，

$$\rho = f^{a^\dagger a} \tag{2.93}$$

で定義される密度演算子である。ただし，$f$ は c 数とする。規格化条件 (2.92) から

$$c_1 c_2 = 1 - f \tag{2.94}$$

が得られる。

**問 9** (2.94) を導け。

式 (2.90) と (2.91) の定義は，サーマル・ペアの凝縮によって作られた真空を与えている。これより，$a$ と $a^\dagger$ からなる任意の演算子 $A$ に対して，

$$\langle 0|A(a,a^\dagger)|0\rangle = c_1 c_2 \sum_{m=0}^{\infty} f^m \langle m|A(a,a^\dagger)|m\rangle \tag{2.95}$$

$$= Tr[\rho A(a,a^\dagger)]/Tr\rho \tag{2.96}$$

の関係が成立することがわかる。

**問 10** (2.96) を導け。
ヒント：関係

$$\langle m,\tilde{l}|A(a,a^\dagger)|m',\tilde{l}'\rangle = \langle m|A(a,a^\dagger)|m'\rangle\delta_{ll'} \tag{2.97}$$

を用いよ。

(2.96) の右辺は，密度演算子 $\rho$ に関する $A$ の統計平均である。$f$ は

$$\begin{aligned} n &= \langle 0|a^\dagger a|0\rangle \\ &= c_1 c_2 \sum_{m=0}^{\infty} m f^m \\ &= \frac{f}{1-f} \end{aligned} \tag{2.98}$$

によって，個数パラメータ $n$ と関連している。こうして，真空期待値（2倍にした空間における純粋状態の期待値）と統計平均（混合状態での期待値）との等価性が得られた [16]。

(2.90) により，真空 $|0\rangle$ は対状態 $|m,\tilde{m}'\rangle$（$m=m'$）の重ね合せであることがわかる。さらに，$\alpha=1/2$，$c_1=c_2^*$ とおくと，$\langle 0|$ は $|0\rangle$ の Hermite 共役となる。つまり，$\alpha$，$c_1$，$c_2$ を上のように選べば，(2.98) の $n$ を代入した熱的 Bogoliubov 変換を通じて (2.90) の真空は $(a,\tilde{a})$ 真空 $|0,\tilde{0}\rangle$ と関係づけられる。

したがって，この節で考察した純粋状態の雑音は，熱的 Bogoliubov 変換によって生成されることがわかる。2.3 節の結晶を通り抜ける二つの光線の問題は，純粋状態における雑音がどのようにして実験的に実現できるかを示している。式 (2.98) をみると，$f=\exp[-\beta\omega]$ **とした真空期待値が温度** $T=1/\beta$ **における熱平均と一致する**ことがわかる。こうして熱平均が純粋状態とみなせることを知ったのである。ここでは，Boltzmann 定数 $k_B$ を $k_B=1$ とする温度の単位を用いている。

### 2.4.2 フェルミオン振動子の熱的真空

前の小節における考察は（$c_1c_2$ と $n$ 以外の値をまったく変更せず），二つのフェルミオン振動子にも適用できる：

$$[a, a^\dagger]_+ = 1 \tag{2.99}$$

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger]_+ = 1 \tag{2.100}$$

$$[a, \tilde{a}]_+ = [a, \tilde{a}^\dagger]_+ = 0. \tag{2.101}$$

真空期待値と熱平均との同一性は，フェルミオン振動子の場合にも保たれる。ケット真空とブラ真空はそれぞれ (2.90) と (2.91) で定義される。

**問 11** フェルミオン振動子に対して

$$c_1c_2 = \frac{1}{1+f} \tag{2.102}$$

と

$$n = \frac{f}{1+f} \tag{2.103}$$

を示せ。

つまり，フェルミオン振動子に対する熱真空もまた，サーマル・ペア（$a\tilde{a}$ 対）を含んでいるのである。したがって，それは，$a$ と $\tilde{a}^\dagger$ を混ぜ合わせるフェルミオンに対する Bogoliubov 変換を通じて，裸の真空 ($|0, \tilde{0}\rangle$) と関係しているはずである。

この節では，$\alpha = 1/2$，$c_1 = c_2^*$ と選び，$|0\rangle$ が $\langle 0|$ の Hermite 共役である場合のみを考察する。この場合，Bogoliubov 変換は個数パラメータ $n$ にのみ依存する。そこで $|0\rangle$，$\langle 0|$ をそれぞれ $|0(\theta)\rangle$，$\langle 0(\theta)|$ と記し，真空の $\theta$ 依存性（$\theta$ によって $n$ が決まる）をあからさまに記すことにする。

熱真空 $\langle 0(\theta)|$，$|0(\theta)\rangle$ は $\theta$ に依存しているので，それらの真空演算子も $\alpha(\theta)$，$\tilde{\alpha}(\theta)$ と記す。$(a, \tilde{a})$ の真空は $|0\rangle\rangle$ と記す。つまり，

$$a|0\rangle\rangle = \tilde{a}|0\rangle\rangle = 0 \tag{2.104}$$

$$\alpha(\theta)|0(\theta)\rangle = \tilde{\alpha}(\theta)|0(\theta)\rangle = 0 \tag{2.105}$$

である。明らかに真空演算子はフェルミオン反交換関係：

$$[\alpha(\theta), \alpha^\dagger(\theta)]_+ = 1 \tag{2.106}$$

$$[\tilde{\alpha}(\theta), \tilde{\alpha}^\dagger(\theta)]_+ = 1 \tag{2.107}$$

$$[\alpha(\theta), \tilde{\alpha}(\theta)]_+ = [\alpha(\theta), \tilde{\alpha}^\dagger(\theta)]_+ = 0 \tag{2.108}$$

を満たす。

この変換は $a$ と $\tilde{a}^\dagger$ を混ぜ合わせるものなので，

$$\alpha(\theta) = ca + d\tilde{a}^\dagger \tag{2.109}$$

$$\tilde{\alpha}(\theta) = c\tilde{a} - da^\dagger \tag{2.110}$$

の形で与えられる。ただし，Bogoliubov 変換の下でのフェルミオン反交換関係の不変性を考慮した。この不変性は，さらに c 数パラメータ $c$ と $d$ に対して $c^2 + d^2 = 1$ の制限を課す。これより，$c = \cos\theta$ や $d = \sin\theta$ とおくことができる。

この変換は，ボソンに対する場合とまったく同様にして，$U_B(\theta)$ で誘起される：

$$\alpha(\theta) = U_B(\theta) a U_B^{-1}(\theta) \tag{2.111}$$

$$\tilde{\alpha}(\theta) = U_B(\theta) \tilde{a} U_B^{-1}(\theta). \tag{2.112}$$

ただし，$U_B(\theta) = \exp[i\theta G_B]$ である。生成子 $G_B$ もまた，ボソンの場合と同様に：

$$G_B = i[a\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger a^\dagger] \tag{2.113}$$

で与えられる。

(2.109) と (2.110) は，

$$\begin{bmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{bmatrix}^\mu = B^{-1}(\theta)^{\mu\nu} \begin{bmatrix} \alpha(\theta) \\ \tilde{\alpha}^\dagger(\theta) \end{bmatrix}^\nu \tag{2.114}$$

$$[a^\dagger, \tilde{a}]^\mu = [\alpha^\dagger(\theta), \tilde{\alpha}(\theta)]^\nu B(\theta)^{\nu\mu} \tag{2.115}$$

の形に書ける。ただし，Bogoliubov 行列 $B(\theta)$ は

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} \tag{2.116}$$

である。個数パラメータは，$n \equiv \langle 0(\theta)|a^\dagger a|0(\theta)\rangle$ と $\tilde{n} \equiv \langle 0(\theta)|\tilde{a}^\dagger \tilde{a}|0(\theta)\rangle$ である。これより，

$$n = \tilde{n} = d^2 \tag{2.117}$$

を得る。パラメータ $d = \sin\theta$ が個数パラメータ $n$ を用いて与えられたわけである。

**問 12** (2.117) を導け。
ヒント：(2.109) と (2.110) の関係を用いよ。

こうして，$|0(\theta)\rangle = U_B(\theta)|0\rangle\rangle$ が得られるが，フェルミオン振動子変数を考えているのでボソンの場合とは異なった結果

$$|0(\theta)\rangle = [\cos\theta + \sin\theta a^\dagger \tilde{a}^\dagger]|0\rangle\rangle \tag{2.118}$$

となる。以下の表式は，この関係を場の量子論に拡張するとき役立つ：

$$|0(\theta)\rangle = e^{\ln\cos\theta} e^{\ln[1+a^\dagger\tilde{a}^\dagger \tan\theta]}|0\rangle\rangle. \tag{2.119}$$

**問 13** (2.118) を導け。
ヒント：

$$G_B|0\rangle\rangle = -i\tilde{a}^\dagger a^\dagger|0\rangle\rangle \tag{2.120}$$

$$G_B^2|0\rangle\rangle = |0\rangle\rangle \tag{2.121}$$

の関係を用いよ。

関係 (2.118) より，状態 $|0(\theta)\rangle$ には $(a\tilde{a})$ 対が凝縮していることがわかる。状態 $|0(\theta)\rangle$ はフェルミオンの熱真空と呼ばれる。$(a,\tilde{a})$ Fock 空間（$\mathcal{H}(a,\tilde{a})$ と記される）は $|0\rangle\rangle$ に $a^\dagger$ や $\tilde{a}^\dagger$ のべき乗を作用することによって作られ，Fock 空間 $\mathcal{H}(\theta)$ は $|0(\theta)\rangle$ に $\alpha^\dagger(\theta)$ や $\tilde{\alpha}^\dagger(\theta)$ のべき乗を作用することによって与えられる。$\mathcal{H}(a,\tilde{a})$ は $\mathcal{H}(\theta)$ と同値で，したがってパラメータ化された Fock 空間 $\mathcal{H}(\theta)$ が同値集合を形成することがわかる。$\alpha(\theta)$ 真空は $a\tilde{a}$ 対が凝縮した状態なので，$a$ と $\tilde{a}$ の交換に関して不変である。この交換がチルダ共役である。

### 2.4.3 真空パラメータ

(2.96) の真空期待値と集団平均との同等性は，(2.90) と (2.91) の真空の定義に基づいている。それゆえ，この真空の定義中に現われるパラメータは，純粋状態による熱雑音の表式に現われるパラメータである。

位相因子は，簡単に $a$ と $\tilde{a}$ へ吸収させられるので重要なパラメータではない。振動子表現を用いて量子力学系を扱うと必ずこの自由度が現われる。$c_1$ の位相因子（この位相因子は，$c_1c_2$ を通じて $c_2$ の位相因子を決定する）も重要ではない。

これらの重要でない自由度はうまく除くことができる。2.2 節で導入したチルダ共役は，チルダと非チルダ演算子の交換をするものであった。そこでは，チ

ルダ共役のもとで真空が不変であることを示した。2.3.1 節でチルダ共役の定義を拡張し，チルダ共役をとる際，c 数はその複素共役をとることにした。チルダ共役の定義をこのように拡張しても，真空のチルダ不変性は保たれる。これにより，上述の位相自由度が除去でき，$c_1$ と $c_2$ は実数となる。

しかし，消し去ることのできないパラメータが三つ存在する。一つは，恒等式 $Tr[\rho A] = Tr[\rho^{1-\alpha} A \rho^{\alpha}]$ に現われる $\alpha$ 自由度である。もう一つは，比 $(c_1/c_2)$ である。(2.90) と (2.91) からわかるようにブラ真空はケット真空の Hermite 共役ではないので，この二つのパラメータは決まらない。もし，ブラ真空がケット真空の Hermite 共役であることを要求すれば，これらのパラメータは，

$$\alpha = \frac{1}{2} \tag{2.122}$$

と

$$\frac{c_1}{c_2} = 1 \tag{2.123}$$

に決まる。パラメータをこのように選んだ純粋状態による定式化は，ユニタリ表現と呼ばれる。本章や次章で純粋状態における雑音を議論するとき，ユニタリ表現を用いる。しかし熱現象を扱う場の量子論では，しばしば非ユニタリ表現が使われる。その理由は，単に計算上の技術的な複雑さを避けるためにこの自由度を利用するだけであり，$\alpha$ や $(c_1/c_2)$ が物理的に重要であるというわけではない。

物理的に重要なパラメータは $f$ である。これは，(2.93) により密度行列 $\rho$ から決まる。個数パラメータ $n$ とは

$$n = \frac{f}{1 - \sigma f} \tag{2.124}$$

の関係がある。ただし，ボソン（フェルミオン）に対して $\sigma = +1\ (-1)$ である。

## 2.5 雑音生成に対する TFD メカニズム

熱雑音が純粋状態に現われることを知ったので，純粋状態によって熱物理学を定式化するという考えが真実味を帯びてくる。さらに，孤立系の熱理論の定式化というより挑戦的な課題に進みたくなる（孤立系とは，たとえば宇宙のように，完全に孤立しているという意味である）。しかし，$a$ と $\tilde{a}$ が力学的演算子であるかぎり，前節の議論は熱物理学へは適用できない；力学的な系では $\omega$,

$\omega'$ がともに正なので，前節で考察したことは静的な平衡系には使えない。力学的自由度だけに依存する系では，純粋状態には熱的自由度を記述する自由度はもはや残っていない。熱的自由度は熱的状況が変わるときにのみ見出されるものである。もし温度があらゆるところでいつも同じならば，熱的自由度を見出すことは決してできない。熱的状況の変化にかかわるこの自由度は，力学的自由度ではない。したがって，熱物理学の純粋状態による定式化において，熱的自由度は力学的自由度に付け加えられる新しい自由度と考えるべきである。前節で議論した純粋状態における雑音生成に関する TFD メカニズムによると，熱的自由度を得るには，力学変数 $a$ にそのチルダ共役量 $\tilde{a}$ をともなわせて各自由度を倍加すればよさそうに思える；自由度の倍加によって，Bogoliubov 変換ができるようになるのである。熱物理学には，熱エネルギーやエントロピー等，熱力学的観測量がたくさんあり，相転移のような熱力学的過程も多く存在する。そこで,「これらの熱力学量や熱力学的転移が，自由度を倍加して得られた純粋状態によって記述できるか？」と問いかけたくなる。

しかし，自由度を倍加するだけでは熱物理学にとって不十分である。多彩な巨視的秩序状態を扱うためには，理論が多様な巨視的秩序状態に適応できなければならない。このことは自由度が有限の量子力学では不可能であり，場の量子論が必要となる。

場の理論の必要性を納得させる簡単な理由がもう一つある。従来の熱物理学では，無限の容量（あるいは，無限の自由度）をもつ熱浴（したがって，これは場に他ならない）を通して熱的制御が行われる。したがって，純粋状態による定式化では，場の量子論の枠組みでの力学的自由度の倍加が必要となる。その様な定式化は Thermo Field Dynamics（TFD）と呼ばれる。これについては後の章で説明する。

しかし熱の問題に入る前に，いかにして場の量子論で巨視的現象を扱うのかを理解しておかなければならない。これは次章で考察する。

## 2.6 TFD メカニズムとブラックホール

TFD のメカニズムを通して，この世界に熱的効果を作り出す力学的な系が存在する。それはブラックホールである。これは明らかに重力場の理論の問題であり，量子力学を主題にしている本章で扱うべきものではない。しかし，ブラックホールによって作り出される熱的雑音と 2 モード・スクイーズド状態に

おける雑音との類似性が顕著なので，ここでごく簡単に触れておく。

2.3.1 節と 2.3.2 節で，互いにまったく相互作用していない二つの系が，真空を通じた相関によってどのように熱雑音を生成させるかをみた。これを TFD メカニズムと呼んだ。同様の状況がブラックホールの物理学に見られる。ブラックホールには地平線がある。その地平線の向こうの世界は，我々の世界とは完全に隔絶されている。しかし，これら二つに分離された世界は共通の真空をもっている。我々の世界の力学変数として $a$ をとると，地平線の向こう側の世界は $\tilde{a}$ によって記述される。この真空は，$a$ と $\tilde{a}$ に関連した真空 $|0\rangle\rangle$ ではなくて，熱的 Bogoliubov 変換を通じて $|0\rangle\rangle$ と関連している $|0(\theta)\rangle$ であることがわかっている。Bogoliubov 変換のパラメータ $\theta$ は，ブラックホールの質量より決まるが，その質量はブラックホールのまわりの放射の温度を決めている（Hawking 温度）[17, 18]。このように，2 モード・スクイーズド状態と完全に対応している。さらに，全系を制御するハミルトニアンは $\hat{H} = H - \tilde{H}$ の構造をもつことがわかっている。ただし，$H$ は我々の世界での力学的現象を表わすハミルトニアンであり，$\tilde{H}$ はチルダ共役規則に基づいて $H$ から得られたものである。2.3.2 節中の自由振動子モデルでは，これは $\omega + \omega' = 0$ を意味し，真空 $|0(\theta)\rangle$ が静的であることを表わしている。

この描像を拡張すると，我々の世界における熱的自由度の起源は，我々の世界と完全に隔絶された別の宇宙が存在するためだいう考えを導く。ただし，その別の宇宙は我々の世界と真空を共有しているのである [19]。このことについては，本書ではこれ以上追求しない。ただ，ブラックホールのまわりの熱的状況のこの記述が，熱平衡状態に対する TFD の定式化とまったく同じであることに触れておきたかったのである。

## 2.7 TFD における位相と時間演算子

これまでの節で，2 成分振動子 $a$ と $\tilde{a}$ を導入することによって，$a$ 振動子に関する混合状態の平均をいかにして 2 成分振動子の純粋状態で記述するかを見た。この節では，この 2 成分振動子の定式化における位相演算子と時間演算子について議論する。2.2.1 節で，位相演算子を導入する際の問題点を紹介した。個数のとり得る値が非負領域に制限されており，したがって下に有界であることに，その問題点の主な原因がある。自由度を倍加して下に有界でない数を導入すると位相演算子が表われることは，Newton によって [4] に示されている。

この考えは，最近，番によって綿密に検討され [6]，TFD メカニズムに応用された。時間演算子に関してもこの論文の中で議論されている。この節では，この論文にしたがってこの方法を調べることにする。

2 モード・スクイーズド系の定常真空に対するハミルトニアンは，

$$\hat{H}_0 = H_0 - \tilde{H}_0 \tag{2.125}$$

$$= \omega \hat{N} \tag{2.126}$$

の形で与えられる。ただし，

$$\hat{N} = a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a} \tag{2.127}$$

は個数演算子である。$a$ 系に関する混合状態での平均は，$(a, \tilde{a})$ 系における純粋状態での真空期待値によって与えられることを見てきた。$a$ 系のエネルギー演算子 $H_0$ の固有値は非負であるが，ハミルトニアン $\hat{H}_0$ の固有値は下に有界ではない。この定式化が熱現象を扱う場の理論にどのように応用されるかは，以下の章で説明する。ここでは，$\hat{H}_0$ の正準共役が存在し，時間演算子として振る舞うことを指摘しておく。同様に，個数演算子 $\hat{N}$ の正準共役が存在し，位相演算子として振る舞うのである。

まず，位相演算子から始めよう。ベクトル $|n, \tilde{m}\rangle\rangle$ の完全系を Hilbert 空間の基底に選ぶことができる。ただし，$n$ と $\tilde{m}$ はそれぞれ $N$ と $\tilde{N}$ の固有値を意味する。この完全系の各要素は $\hat{N}$ の固有値 $\hat{n}$ と $\tilde{m}$ によって特定されるので，この状態を $|\hat{n}, \tilde{m}\rangle\rangle$ と記すことにする。Hilbert 空間の基底は，集合 $(|\hat{n}, \tilde{m}\rangle\rangle : -\infty < \hat{n} < \infty, 0 \le \tilde{m} < \infty)$ となる。これを用いると，規格直交完全性の関係は

$$\langle\langle \hat{n}, \tilde{m} | \hat{n}', \tilde{m}' \rangle\rangle = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \tag{2.128}$$

と

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{n}, \tilde{m}\rangle\rangle \langle\langle \hat{n}, \tilde{m}| = 1 \tag{2.129}$$

で与えられる。ただし，1 は恒等演算子である。

演算子 $D$ を

$$D = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{n} - 1, \tilde{m}\rangle\rangle \langle\langle \hat{n}, \tilde{m}| \tag{2.130}$$

で導入する。これは関係式

$$DD^\dagger = D^\dagger D = 1 \tag{2.131}$$

$$D|\hat{n}, \tilde{m}\rangle\rangle = |\hat{n} - 1, \tilde{m}\rangle\rangle \tag{2.132}$$

$$D^\dagger|\hat{n}, \tilde{m}\rangle\rangle = |\hat{n} + 1, \tilde{m}\rangle\rangle \tag{2.133}$$

を満たしていることが証明できる。

**問 14** 上の関係式を導け。

上の関係式から

$$[D, \hat{N}] = D \tag{2.134}$$

が得られ，これより $D$ は ($i\times$ 指数演算子) の指数関数であることがわかる。この点を明確にするために，状態

$$|\theta, \tilde{m}\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-in\theta)|\hat{n}, \tilde{m}\rangle\rangle \tag{2.135}$$

を導入する。すると，関係式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-in\theta) = 2\pi\delta(\theta) \tag{2.136}$$

（ただし，$\theta$ は領域 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ に制限されているものとする）を用いて，規格直交完全性の関係

$$\langle\langle\theta, \tilde{m}|\theta', \tilde{m}'\rangle\rangle = \delta_{mm'}\delta(\theta - \theta') \tag{2.137}$$

と

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, |\theta, \tilde{m}\rangle\rangle\langle\langle\theta, \tilde{m}| = 1 \tag{2.138}$$

を導くことができる。

**問 15** 関係式 (2.136) を導け。
ヒント 1： 0 でない $\theta$ に対して，左辺が 0 になることを証明せよ。
ヒント 2： $\theta$ の全領域にわたって左辺を積分し，0 以外の $n$ の項が寄与しないことを示せ。

こうして，関係式

$$D|\theta, \tilde{m}\rangle\rangle = \exp(-i\theta)|\theta, \tilde{m}\rangle\rangle \tag{2.139}$$

を導くことができる。これより，

$$D = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, |\theta, \tilde{m}\rangle\rangle \exp(-i\theta) \langle\langle \theta, \tilde{m}| \tag{2.140}$$

となり，$\hat{N}$ に共役な**位相演算子**が得られる。$\hat{N}$ を $\hat{H}_0$ で置き換えると，**時間演算子**が得られる。

7，8，9章で，TFDと呼ばれる熱現象を扱う実時間形式の場の量子論を導入する。そこでは，この節での考察がこのままTFDに応用できることがわかるであろう。結局，TFDには位相演算子と時間演算子の存在することがわかった。現時点では，TFDの理解や吟味に，この結果の意味するところがまだ充分に役立てられてはいない。

## 参考文献


[1] L. Susskind and J. Glogower, *Physics* **1** (1964) 49.
[2] P. Carruthers and M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **40** (1968) 411.
[3] J. M. Levy-Leblond, *Ann. Phys.* **101** (1976) 319.
[4] R. Newton, *Ann. Phys.* **124** (1980) 327.
[5] D. T. Pegg and S. M. Barnett, *Phys. Rev.* **A41** (1990) 3427.
[6] M. Ban, *Journal Math. Phys.* **32** (1991) 3077.
[7] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131** (1963) 2766.
[8] B. Yurke and M. Potasek, *Phys. Rev.* **A36** (1987) 3464.
[9] S.M. Barnett and P.L. Knight, *J. Opt. Am.* **B2** (1985) 467.
[10] S.M. Barnett and P.L. Knight, *Phys. Rev.* **A38** (1988) 1657.
[11] A. Mann and M. Revzen, *Phys. Lett.* **134A** (1989) 273.
[12] Y.S.Kim and Ming Li, *Phys. Lett.* **139A** (1989) 443.
[13] A. Mann, M. Revzen, H. Umezawa, and Y. Yamanaka, *Phys. Lett.* **140A** (1989) 475.
[14] A. Mann and M. Revzen, *Phys. Lett.* **134A** (1988) 531.
[15] M. Berman, *Phys. Rev.* **A40** (1989) 2057.
[16] Y. Takahashi and H. Umezawa, *Collect. Phenom.* **2** (1975) 55.
[17] W. Israel, *Phys. Lett.* **57A** (1976) 107.
[18] H. Umezawa, A.E.I. Johansson, and Y. Yamanaka, *Class. Quantum Grav.* **7** (1990) 385.
[19] R. Laflamme, *Physica* **158A** (1989) 58.

# 3
# 非同値真空

## 3.1 はじめに

量子力学により微視的な世界の扉が開かれた。しかしながら，原子中の電子のエネルギー準位が放射補正によってずれる（Lamb シフト）という発見により，量子力学は微視的世界全体を説明していないことがわかった。放射補正を考慮しなければならないということは，場の量子論が必要だということである。現代物理学によると，自然界はクォーク場，レプトン（lepton）場と，多種のゲージ場で構成されている。したがって，ますます多くの現象の説明に場の量子論が必要になるであろうと考えるのが自然である。この状況は，場の量子論を超える新しい物理学が生まれるまで続くであろう。

その発展初期の段階では，場の量子論は，非常に多数の自由度をもつ系を扱うために，量子力学を単純に拡張したものと広く考えられていた。物理学者は，量子力学で成立しているほとんどの法則が場の量子論にも適用できるものと考えがちであった。その中には，あらゆる表現空間が同等であるという前章で述べた法則も含まれていた。しかし，そのような単純な考え方は，新しい視点の必要性を示唆する新しい現象によって覆されたのである。この章では，それらのいくつかを簡単に議論する。

### 3.1.1 制動放射における赤外発散

場の量子論の発展は，量子電磁気学によって 1929 年に始まった。したがっ

て初期のほとんどの応用は，電磁気にかかわる物理量の計算であった。計算方法としては，量子力学で定式化された摂動描像の単純な拡張でまかなわれた。そのため，$H_0$ を非摂動ハミルトニアンとする，$H = H_0 + H_{int}$ の形のハミルトニアンが採用され，相互作用ハミルトニアン $H_{int}$ の次数で展開するという計算手続きがとられた。多数の問題の中で，Compton 散乱と電子の制動放射（Bremsstrahlung）が多くの研究者の興味を引いた。ところが，制動放射の最低次の摂動計算でただちに困難にぶつかった；遷移断面積が低エネルギー光子の寄与のため発散したのである。この困難は，F. Bloch と A. Nordsieck によって解決された [1]。二人は，正準変換によって観測される電子が光子の雲をまとっていることを示し，さらに，ソフト・フォトン（soft photon）部分を考慮に入れると赤外発散が解消することを示したのである。この状況は，直感的には次のように理解できる [2]。電子の周りに乱雑に分布している光子を考えてみよう。電子と相互作用してもソフト・フォトンは実質的には電子の運動量を変えることはないので，ソフト・フォトンだけを考えているときには乱雑分布の仮定はもっともなものである。光子 1 個を見つける確率を $a$ と記そう。光子を $n$ 個見つける確率は $(1/n!)a^n$ となる。全事象の起こる確率を 1 に規格化するための定数 $\exp(-a)$ を導入すると，これは光子の Poisson 分布を与える。つまり，$n$ 個の光子を見つける確率は $(1/n!)a^n \exp(-a)$ となる。赤外発散は $a$ が無限大であるために現われる。いかなる有限個のソフト・フォトンを見つける確率がなくなり，そのため**無限個のソフト・フォトンが各電子のまわりにいることになる**。無限個の光子に取り囲まれた電子は，有限次数の摂動計算では決して得られない。なぜなら，非摂動状態が裸（bare）の電子（光子をともなわない電子）であると，有限次数の摂動計算では有限個の電子しか取り込めないからである。

有限個の光子を見つける確率が零であるという事実は，驚くべき示唆を与える；観測される電子の状態ベクトルは，裸の電子と光子の Hilbert 空間を張る状態ベクトルでは意味のある展開ができないことを示している。言い替えると，**観測される電子の状態ベクトルは，裸の電子と光子の Hilbert 空間には属していないように見える**。前章で，量子力学ではすべての表現がそれぞれ同値であることを見た。観測される電子の構造に関する上述の解析により，場の量子論ではこの同値性が成り立たないのかもしれないことが予想されるのである。しかしながら，当時のほとんどの物理学者は，赤外発散問題に関するこの観点の重要性には気づかなかった。

制動放射断面積の計算における赤外発散の研究により，観測される粒子は裸の粒子とはまったく違ったものであることがわかったのである。

### 3.1.2 真空偏極

古典電磁気でよく知られているように，外場の作用は電磁波が伝わる媒質によって変わる。媒質の中に電荷をおくと，反対符号の電荷を引きつけ，同符号の電荷を遠ざける。この遮蔽（screening）効果のためにもとの電荷は薄められる。したがって，媒質のように振る舞う過渡的な粒子で満たされた場の量子論における真空の中で，外から入れられた電磁波や電荷がどう振る舞うかを調べてみたくなる。ベクトル・ポテンシャル $\vec{A}$ で表わされる外場は，$\vec{j}\cdot\vec{A}$ の形のハミルトニアンで量子場の流れ $\vec{j}$ と相互作用する。外場が誘起する流れは，

$$J_i = -i\int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3x' \langle 0|[j_i(\vec{x},t), j_l(\vec{x}',t')]|0\rangle A_l(\vec{x}',t') \tag{3.1}$$

で与えられる。これは応答公式と呼ばれている。この公式を用いると，電荷，流れ，電磁場の変化や光子場のベクトル・ポテンシャルの変化を計算することができる。もし，電荷が薄められるのなら，観測される電荷 $e_r$ は，もとの電荷 $e_0$（いわゆる裸の電荷）より小さいはずである。通常の記述法にしたがって $e_r = Z_3^{1/2}e_0$ と書くと，変化がなければ $Z_3$ は 1 のはずだし，もし薄められていれば $1 > Z_3 \geq 0$ となるはずである。応答理論を用いると，$1 > Z_3 \geq 0$ であることが，摂動理論を用いずに，しかもモデルによらずに証明された [3]。この現象は真空偏極と呼ばれている。電荷の変化は，電荷のくりこみと呼ばれているものである。

初期のくりこみ理論では，注目している荷電粒子のみの電荷くりこみが考慮された。たとえば，くりこまれた電子の電荷の計算では真空電子の影響のみが考慮された。すると，くりこまれた電子の電荷が $\mu$ 中間子（meson）の電荷と異なるという不可解な結果になってしまうのである。この問題は，すべての荷電粒子が真空偏極に参与することに気づくことにより解決された。荷電のくりこみが光子のベクトル・ポテンシャルの変化と関連していることに気がつくと，より理解しやすいであろう。裸のベクトル・ポテンシャルを $A$，変更を受けた（くりこまれた）ベクトル・ポテンシャルを $A_r$ と記すことにすると，$A_r = Z_3^{-1/2}A$ となることが示せる。これは，光子の波動関数くりこみと呼ばれているものである。すべての荷電粒子と相互作用しているので，光子のくりこみが電荷のくりこみに影響を与えるのである。朝永振一郎はこの事実を単純明解に次のよう

にまとめている。「電荷というものは荷電粒子に属しているのではなく，光子に属しているのである」（私信）。

このくりこみの様子をみると，真空が実に変化に富んだ媒質であるという特筆すべき事実がわかる。観測される光子は，真空偏極のために裸の光子ばかりでなく無限個の電子や陽電子，他の荷電粒子を抱えているのである。波動関数のくりこみのせいで量子論で基本的な正準交換関係がもはや成立しないのではないかという，やっかいな疑問が頭をもたげてくる。この疑問は，観測される粒子の Hilbert 空間が，裸の粒子のものとは非同値であることを発見したおかげで，正準交換関係を破ることなく解決される。つまり，相互作用の効果は，一つの Hilbert 空間に制限された変換では扱えないのである。

注意しておくが，観測される電荷が裸のものより小さくなるという上記の特徴は，ゲージ（gauge）理論においては必ずしも成立しない。非 Abel ゲージ理論の中には，観測される結合定数が裸のものよりも大きい場合がある。この場合には観測粒子の中に入り込んでいくと結合定数がどんどん小さくなり，漸近的自由（asymptotically free）と呼ばれている理論に行きつく。

### 3.1.3 くりこみ

以上で，観測される粒子が裸の粒子とはたいへん異なり，その状態ベクトルは裸の粒子の Hilbert 空間には属してはいなさそうだという，いくつかの現象を見た。裸の粒子に付随したパラメータを物理的なものに射影することを，くりこみと呼ぶ。我々はただ一つの Hilbert 空間に留まる必要があり，またそれが観測状態の空間であるべきなので，観測粒子の Fock 空間だけを採用すべきである。摂動論のことばでいうと，非摂動表現は観測される粒子のパラメータ（観測される質量など）で書かれるべきだということになる。結合定数も観測されるパラメータで表わされるべきである。これがくりこみ理論である。こうして，質量のくりこみ，結合定数のくりこみ，波動関数（あるいは場）のくりこみが得られた。よく知られているように，相対論的場の理論における紫外発散が，くりこみの手続きにより解消される。ただし，上述の考察からわかるように，**くりこみは紫外発散のない物性物理学などの場合にも実行しなければならない**のである。

これらの状況を見ると，「場の量子論においては Hilbert 空間どうしの同値定理が成立していないのではないか」という疑問を投げかけざるをえない。量子力学における同値定理は，コヒーレント状態やスクイーズド状態を例にして前

節で紹介した。そこで以下では，同じ例を場の量子論に拡張して，はたして同値定理が場の量子論においても成立するのかどうかを検証しよう。

## 3.2 多数の真空

場の量子論における真空の検証をするために，まずコヒーレント状態にかかわる Bogoliubov 変換の考察から始めることにしよう。2.2 節の考察を量子場の場合にあてはめる。つまり，それぞれの振動子の演算子に運動量の添え字をつけ，振動子演算子の一つの組 $a_k$ か，二つの組 $(a_k, \tilde{a}_k)$ を考える。まず，$a_k$ に関するコヒーレント状態から始めよう。2.2 節で得られた関係式を列挙しておく；

$$[a_k, a_l^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{l}) \tag{3.2}$$

$$a_k|0\rangle\rangle = 0 \tag{3.3}$$

$$a_k \to \alpha_k(\theta) = a_k + \theta_k \tag{3.4}$$

$$\alpha_k(\theta)|0(\theta)\rangle = 0. \tag{3.5}$$

これより，

$$a_k|0(\theta)\rangle = -\theta_k|0(\theta)\rangle \tag{3.6}$$

$$G_c(\theta) = -i\int d^3k\,(\theta_k^* a_k - \theta_k a_k^\dagger) \tag{3.7}$$

$$U_c(\theta) = \exp\left[iG_c(\theta)\right] \tag{3.8}$$

と

$$|0(\theta)\rangle = U_c(\theta)|0\rangle\rangle \tag{3.9}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\int d^3k\,|\theta_k|^2\right)\exp\left(-\int d^3k\,\theta_k a_k^\dagger\right)|0\rangle\rangle \tag{3.10}$$

を得る。

**問 1** 2 章の関係式 (2.24) の導出法を，いま考察している量子場系に応用して，(3.10) を導け。

簡単のため，空間並進に関して不変な真空 $|0(\theta)\rangle$ の場合に話をかぎることにしよう。その場合には，$\theta_k$ は，空間に依存しないある定数の Fourier 展開係数

である。したがって，$\theta\delta(\vec{k})$ の形をしており，

$$\int d^3k|\theta_k|^2 = \infty \tag{3.11}$$

を与える。つまり，

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\int d^3k\,|\theta_k|^2\right) = 0 \tag{3.12}$$

を得る。ところで，

$$\langle 0(\theta)| = \langle\langle 0|U_c^{-1}(\theta) \tag{3.13}$$

より

$$\langle 0(\theta)|0(\theta)\rangle = 1 \tag{3.14}$$

が成立している。

以上の結果と (3.10) より，有限の任意の数 $m_k$ に対して

$$\langle\langle m_k|0(\theta)\rangle = 0 \tag{3.15}$$

であることがわかる。ただし，

$$|m_k\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{m_k!}}(a_k^\dagger)^{m_k}|0\rangle\rangle \tag{3.16}$$

である。これは，$|0(\theta)\rangle$ 中に有限個の $a$ 粒子状態を発見する確率がいかなる個数に対しても消えてしまうこと，したがって，$|0(\theta)\rangle$ が無限個の $a$ 粒子を含んでいることを示している。この状況は，制動放射における赤外発散を調べた際に議論した，観測される電子のときとまさに同じである。**表式 (3.10) が明らかにしていることは，$\alpha$ 真空 $|0(\theta)\rangle$ が $\mathcal{H}(a)$ に属する状態ベクトル（それらは，$a^\dagger$ を $|0\rangle\rangle$ に何度も演算して得られる基底ベクトル上に作られている）の重ね合せではあり得ないということである。**同じことが，空間 $\mathcal{H}(\theta)$ のいかなるベクトル（それらは，$|0(\theta)\rangle$ に何度も $\alpha(\theta)^\dagger$ を演算して得られる基底ベクトル上に作られている）についてもいえる。$\mathcal{H}(a)$ 中のいかなるベクトルも $\mathcal{H}(\theta)$ 内のベクトルの重ね合せではない（その反対の場合も含めて）という意味で，$\mathcal{H}(a)$ は $\mathcal{H}(\theta)$ と**非同値**なのである。Fock 空間は $\mathcal{H}(\theta)$ のようにパラメータで区別され，ある二つの空間のパラメータ $\theta$ が異なれば互いに**非同値**である。このことより，量子力学の Hilbert 空間に関する同値定理が，場の量子論では成立していないことがわかる。

ここで以下の重要な注意を述べておくべきであろう。$a_k$ の真空 $|0\rangle\rangle$ は $\theta$ が零でない Fock 空間 $\mathcal{H}(\theta)$ には属していないが，演算子 $a_k$ の方はきちっと定義されている（$\mathcal{H}(\theta)$ 中の状態ベクトルへの演算が (3.4) の関係式で定義されているという意味で）のである。演算子 $a_k$ は真空 $|0(\theta)\rangle$ を消去しないので，Fock 空間を用いている場合は，たとえそれが振動子の交換関係 (3.2) を満たしていても，消滅演算子とは呼べない。(3.10) にある真空 $|0(\theta)\rangle$ の構造を表わす表式は直感に訴えるときの助けとなるが，数学的な解釈はこのような関係式に依存してはならないというのが，ここでの教訓である。(3.10) 中の係数が零となってしまうので，この式は数学的に意味のないものなのである。数学的な解析は，数学として意味のある (3.4) や (3.5) の関係式に基礎をおくべきである。

以上の議論により，上記 Fock 空間が非同値である理由は，無限個の $a$ 粒子の真空 $|0(\theta)\rangle$ への凝縮にあることがわかる。空間並進における真空の不変性を仮定すると，観測された二つの真空が異なった振舞いをするためには有限密度の粒子が凝縮している必要があり，体積無限大の系の凝縮状態には無限個の粒子があるということになる。実際，上述の $(2\pi)^3[\delta(\vec{k})]_{\vec{k}=0}$ は $\vec{k}=0$ における $\exp[i\vec{k}\vec{x}]$ の空間積分であるので，それはまさに無限大の体積 $V$ を与える。この見方は，ともすると，Fock 空間の多数出現する原因が体積無限にあるという誤った認識に導くかもしれない。次節での議論でわかるように，非同値な Fock 空間が多数現われることは，量子場に付随する無限の自由度に起因するのである。

同様の状況は，スクイーズド状態への Bogoliubov 変換の場合にも起こる。いま，2 種類の可換な振動子：

$$[a_k, a_l^\dagger] = [\tilde{a}_k, \tilde{a}_l^\dagger] = \delta(\vec{k}-\vec{l}) \tag{3.17}$$

$$[a_k, \tilde{a}_l] = [a_k, \tilde{a}_l^\dagger] = 0 \tag{3.18}$$

で書かれている生成子を考えよう。2.2 節での 2 モード・スクイーズド状態に関する考察を量子場へ拡張する。生成子は，

$$G_B(\theta) = i\int d^3k\,\theta_k[a_k\tilde{a}_k - \tilde{a}_k^\dagger a_k^\dagger] \tag{3.19}$$

であり，変換は，

$$\alpha_k(\theta) = c_k a_k - d_k\tilde{a}_k^\dagger \tag{3.20}$$

$$\tilde{\alpha}_k(\theta) = c_k\tilde{a}_k - d_k a_k^\dagger \tag{3.21}$$

となる。ただし，$c_k = \cosh\theta_k$，$d_k = \sinh\theta_k$ であり，$\theta_k$ は変換のパラメータである。

$a$ 真空と $\alpha$ 真空は，

$$a_k|0\rangle\rangle = \tilde{a}_k|0\rangle\rangle = 0 \tag{3.22}$$

$$\alpha_k(\theta)|0(\theta)\rangle = \tilde{\alpha}_k(\theta)|0(\theta)\rangle = 0 \tag{3.23}$$

で定義される。これより，

$$|0(\theta)\rangle = U_B(\theta)|0\rangle\rangle \tag{3.24}$$

$$= \exp\left[-\delta^{(3)}(0)\int d^3k \ln\cosh\theta_k\right] \times \exp\left[\int d^3k \left[a_k^\dagger \tilde{a}_k^\dagger \tanh\theta_k\right]\right]|0\rangle\rangle \tag{3.25}$$

を得る。ただし，$U_B(\theta) = \exp[i\theta G_B]$ である。$\delta^{(3)}(0)$ は，$\vec{k}=0$ の場合の $\delta(\vec{k})$ を表わす。これは，$|0(\theta)\rangle$ の中に $(a_k\tilde{a}_k)$ 対が凝縮していることを示している。状態 $|0(\theta)\rangle$ は熱的真空と呼ばれ，$(a_k\tilde{a}_k)$ 対はサーマル・ペアと呼ばれている。$|0\rangle\rangle$ に $(a_k^\dagger, \tilde{a}_k^\dagger)$ をくり返し演算することにより，$(a_k, \tilde{a}_k)$ Fock 空間の基底ベクトル（$\mathcal{H}(a,\tilde{a})$ と記す）が作れるが，Fock 空間 $\mathcal{H}(\theta)$ は，$|0(\theta)\rangle$ に $(\alpha_k(\theta)^\dagger, \tilde{\alpha}_k(\theta)^\dagger)$ をくり返し演算して作られた基底ベクトル上に作られる。$\delta^{(3)}(0) = \infty$ であるので，表式 (3.25) は，$\mathcal{H}(a,\tilde{a})$ が $\mathcal{H}(\theta)$ と非同値であることを表わしている。この状況は，$\theta \neq \theta'$ である二つの空間 $\mathcal{H}(\theta)$ と $\mathcal{H}(\theta')$ が互いに非同値であることと同じである。パラメータで区別された Fock 空間 $\mathcal{H}(\theta)$ は，非同値な空間の集合をなしているのである。

コヒーレント状態の場合に議論したように，スクイーズド状態の生成子 $G_B$ は数学的にはきちっと定義されていない。にもかかわらず (3.20) と (3.21) の関係はきちっと定義されており，$\mathcal{H}(\theta)$ 中のベクトルへの $a_k$ や $\tilde{a}_k$ の演算は，この関係によって定義されている。しかし，$a_k$ と $\tilde{a}_k$ は真空 $|0(\theta)\rangle$ を消去しないので，消滅演算子ではない。

粒子数パラメータ $n_k$ は，

$$n_k\delta(\vec{k}-\vec{l}) \equiv \langle 0(\theta)|a_k^\dagger a_l|0(\theta)\rangle \tag{3.26}$$

で定義される。これより，$n_k[\delta(\vec{q})]_{\vec{q}=0} = \langle 0(\theta)|a_k^\dagger a_k|0(\theta)\rangle$ を得る。なお，これは，$\langle 0(\theta)|\tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k|0(\theta)\rangle$ と同じである。$(2\pi)^3[\delta(\vec{q})]_{\vec{q}=0} = V$ なので，$(2\pi)^{-3}n_k$ は

粒子数密度である。以下では，$n_k$ を数密度あるいは個数パラメータと略称で呼ぶことにしよう。

場の量子論では非同値真空の連続集合があり，それにより非同値 Fock 空間の連続集合が導かれることをこの節で見た。「なぜ場の量子論では多くの非同値な Fock 空間が現われるのか？」という問題に関する一般的な議論は 4.3 節で行う。

## 3.3 異常演算子

数学的には基礎づけがなされていないが，$G_c(\theta)$ や $G_B(\theta)$ のような生成子をしばしば利用するので，これらを異常演算子（anomalous operators）と呼んでいる。演算子 $G_c(\theta)$ をあくまでも使いたいというのであれば，まず $\theta_k$ を

$$\theta_k \to \theta_k f(\vec{k}) \tag{3.27}$$

と置き換える。ただし，$f(\vec{k})$ は 2 乗可積分関数である：

$$\int d^3k |f(\vec{k})|^2 < \infty. \tag{3.28}$$

$f(\vec{k})$ が 2 乗可積分であるかぎり，$G_c$ の病的な性質は現われない。$f(\vec{k}) \to \delta(\vec{k})$ の極限は最後にとることにする。異常演算子に対するこのぼかし技巧（smearing out trick）は，しばしば断りなく用いられる。同様に，(3.19) 中の $G_B(\theta)$ も

$$G_B(\theta) = i \int d^3k \int d^3q \, \theta_k f(\vec{q}) [a_{k+q} \tilde{a}_{-k} - \tilde{a}^\dagger_{-k} a^\dagger_{k+q}] \tag{3.29}$$

と置き換える。$f(\vec{q})$ は上記の 2 乗可積分関数である。

このぼかし技巧は，次のように空間座標に関して定式化された。

$$\int d^3x \rho(\vec{x}) \tag{3.30}$$

の形の異常生成子を考えよう。ぼかし技巧により，これは，

$$\int d^3x f(\vec{x}) \rho(\vec{x}) \tag{3.31}$$

となる。ただし，2 乗可積分関数

$$\int d^3x |f(\vec{x})|^2 < \infty \tag{3.32}$$

を導入した。$f(\vec{k})$ は，$f(\vec{x})$ の Fourier 変換である。

## 3.4 純粋状態と混合状態

### 3.4.1 ボソン系

2.3 節で，Bogoliubov 変換によって純粋状態に雑音が作れることをみた。2.4 節では，Bogoliubov 変換で作られたその雑音が，混合状態による統計平均によっても表現できることを示した。運動量の添え字を導入して，これらすべての考察を場の量子論に拡張してみよう。それにあたっては，注意深く話を進めねばならない。たとえば，2.3 節の不確定性関係 (2.86) を運動量の添え字 $k$ つきの正準演算子 $(\vec{q}_k, \vec{p}_k)$ に応用すると，両辺は $[V/(2\pi)^3]^2$ に比例する。ただし，$\vec{k}=0$ のとき $V=(2\pi)^3\delta(\vec{k})$ である。これには何も問題はない；平面波の状態が規格化できないこと，したがって，それらは Fock 空間に属していないことの現われである。

$$p_i = \int d^3k f_i(\vec{k}) p_k \tag{3.33}$$

$$q_i = \int d^3k f_i(\vec{k}) q_k \tag{3.34}$$

で与えられる波束演算子の不確定性関係を求める必要がある。ここに，$f_i(\vec{k})$ は規格直交完全性を満たす 2 乗可積分関数系の要素である。こうして，2.3 節での不確定性関係 (2.86) に基づいた雑音の議論が再び可能となる。純粋状態での期待値と混合状態による平均との間の関係を調べるときにも，微妙な点が現われる。$a_k$ と $a_k^\dagger$ で構成されている任意の演算子 $A$ に対する (2.96) の関係を

$$\langle 0|A(a,a^\dagger)|0\rangle = Tr[\rho A(a,a^\dagger)]/Tr\rho \tag{3.35}$$

と書くことにより場の量子論へ拡張しようとすると，空間 $\mathcal{H}(\theta)$ に関する議論の中で数学的には意味をなさない裸の状態を用いたいくつかの表式が，トレースの定義やこの関係式の導出に必要となる（もっとも，それらは純粋状態での雑音と統計力学における雑音との間の関係を理解する上で役立つのであるが)。そこで以下では統計力学を経由せずに，前節の純粋状態による定式化を直接場の量子論へ拡張してみよう。2 種類の振動子量子場におけるスクイーズド状態での純粋状態雑音は，後の章で展開する TFD への好都合な下準備となっている。

2.6 節で議論した，ブラックホール周辺での Hawking 放射に関する純粋状態での定式化は，もともと場の理論的なものであり，場の理論により定式化するのが賢明である。

### 3.4.2　フェルミオン系

2.4.2 節で示したように，前節 3.2 での議論はフェルミオン系の熱的真空へたやすく拡張できる：

$$[a_k, a_l^\dagger]_+ = \delta(\vec{k} - \vec{l}) \tag{3.36}$$

$$[\tilde{a}_k, \tilde{a}_l^\dagger]_+ = \delta(\vec{k} - \vec{l}) \tag{3.37}$$

$$[a_k, \tilde{a}_l]_+ = [a_k, \tilde{a}_l^\dagger]_+ = 0. \tag{3.38}$$

まとめだけを簡単に示しておこう。

フェルミオン系の熱的真空もサーマル・ペア（$a_k\tilde{a}_{-k}$ 対）を含んでいる。したがって，$a_k$ と $\tilde{a}_k^\dagger$ とを混ぜるフェルミオンの Bogoliubov 変換を通じて，それは裸の真空に関係しているはずである。

熱的真空を $\langle 0(\theta)|$，$|0(\theta)\rangle$ と記し，それらの真空演算子を $\alpha_k(\theta)$，$\tilde{\alpha}_k(\theta)$ と記そう。$(a_k, \tilde{a}_k)$ の真空を $|0\rangle\rangle$ とおくと，

$$a_k|0\rangle\rangle = \tilde{a}_k|0\rangle\rangle = 0 \tag{3.39}$$

$$\alpha_k(\theta)|0(\theta)\rangle = \tilde{\alpha}_k(\theta)|0(\theta)\rangle = 0 \tag{3.40}$$

である。いうまでもなく，真空演算子はフェルミオンの反交換関係を満たすことが要求される：

$$[\alpha_k(\theta), \alpha_l^\dagger(\theta)]_+ = \delta(\vec{k} - \vec{l}) \tag{3.41}$$

$$[\tilde{\alpha}_k(\theta), \tilde{\alpha}_l^\dagger(\theta)]_+ = \delta(\vec{k} - \vec{l}) \tag{3.42}$$

$$[\alpha_k(\theta), \tilde{\alpha}_l(\theta)]_+ = [\alpha_k(\theta), \tilde{\alpha}_l^\dagger(\theta)]_+ = 0. \tag{3.43}$$

(2.109) と (2.110) の関係が示すように，熱的 Bogoliubov 変換は，

$$\begin{bmatrix} a_k \\ \tilde{a}_k^\dagger \end{bmatrix}^\mu = B_k^{-1}(\theta)^{\mu\nu} \begin{bmatrix} \alpha_k(\theta) \\ \tilde{\alpha}_k^\dagger(\theta) \end{bmatrix}^\nu \tag{3.44}$$

$$[a_k^\dagger, \tilde{a}_k]^\mu = [\alpha_k^\dagger(\theta), \tilde{\alpha}_k(\theta)]^\nu B_k(\theta)^{\nu\mu} \tag{3.45}$$

で与えられる。ただし，$c_k = \cos\theta_k$，$d_k = \sin\theta_k$ とおくと，

$$B_k(\theta) = \begin{bmatrix} c_k & d_k \\ -d_k & c_k \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

である。数密度パラメータ $n_k$ と $\tilde{n}_k$ は，$n_k[\delta(\vec{q})]_{\vec{q}=0} \equiv \langle 0|a_k^\dagger a_k|0\rangle$ と $\tilde{n}_k[\delta(\vec{q})]_{\vec{q}=0} \equiv \langle 0|\tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k|0\rangle$ で定義される。したがって，

$$n_k = \tilde{n}_k = d_k^2 \tag{3.47}$$

となり，パラメータ $d_k = \sin\theta_k$ が数パラメータ $n_k$ で与えられる。

この変換は，$U_B(\theta)$ により

$$\alpha_k(\theta) = U_B(\theta) a_k U_B^{-1}(\theta) \tag{3.48}$$

$$\tilde{\alpha}_k(\theta) = U_B(\theta) \tilde{a}_k U_B^{-1}(\theta) \tag{3.49}$$

で誘起される。ただし，$U_B(\theta)$ は

$$U_B(\theta) = \exp\left(-\int d^3k\theta_k[a_k\tilde{a}_k - \tilde{a}_k^\dagger a_k^\dagger]\right) \tag{3.50}$$

である。

これより $|0(\theta)\rangle = U_B(\theta)|0\rangle\rangle$ となり，

$$\begin{aligned} |0(\theta)\rangle = \exp&\left([\delta(\vec{q})]_{\vec{q}=0}\int d^3k \ln\cos\theta_k\right) \\ &\times \exp\left(\int d^3k\ \ln[1 + a_k^\dagger \tilde{a}_k^\dagger \tan\theta_k]\right)|0\rangle\rangle \end{aligned} \tag{3.51}$$

を得る。ここでも $[\delta(\vec{q})]_{\vec{q}=0}$ の存在がすべての有限個のサーマル・ペアに対する振幅を零にし，無限個のサーマル・ペアが凝縮していることを示している。したがって，パラメータで区別された Fock 空間 $\mathcal{H}(\theta)$ （それらは非同値集合をなす）が得られる。$\alpha(\theta)$ 真空は $a\tilde{a}$ 対が凝縮した状態なので，チルダ共役に関して不変である。

## 参考文献


[1] F. Bloch and A. Nordsieck, *Phys. Rev.* **52** (1937) 54.

[2] H. Umezawa, *Quantum Field Theory*, (North-Holland, Amsterdam, 1956).

[3] H. Umezawa and S. Kamefuchi, *Prog. Theor. Phys.* **6** (1951) 543.

# 4
# 準粒子描像

## 4.1 現代的粒子描像と古典的原子論

前章では，連続パラメータによって区別された非同値 Fock 空間 $\mathcal{H}(\theta)$ の集合（異なる $\theta$ の値をもつ二つの空間は互いに非同値である）の例をいくつか見てきた。ここでいう非同値とは,「Fock 空間のベクトルの中に，別の Fock 空間の状態ベクトルの重ね合せではないものが含まれている」という意味である。この非同値性の原因は，無限個の粒子が真空中に凝縮したことにある。この状況は量子力学の場合とはまったく異なっている。この非同値性のおかげで，場の量子論では多様な相を記述することができるのである。それぞれの相では，異なった種類の観測粒子がその量子場系の記述をつかさどっている。このように，場の量子論を用いれば，系のもつ多種類の相を取り扱うことができるのである。

一つの系が多くの異なった外観を呈するので，現代的粒子描像ではそのことば遣いに二重構造がある [1]：基本的構成物に関することばと観測粒子にかかわることばである。古典原子論には単一の構造しかない：基本的粒子がそのまま観測粒子なのであった。統計力学は微視的世界から巨視的現象を導き出す理論のはずであるから，微視的世界を記述することばの構造が変わった以上，統計力学の定式化にも変更を加える必要がある。つまり，現代的統計力学には，ことばの二重構造をうまく取り入れるためのなんらかの重要な改良が加えられる必要がある。

非同値表現の存在は現代的多体理論を定式化するのにきわめて重要であるので，この章では，場の量子論での非同値表現にかかわる数学を簡単にではあるが系統的に述べる。

## 4.2 可算無限自由度

3章で見てきたように，量子場は，

$$[\alpha_k, \alpha_l^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{l}) \tag{4.1}$$

の関係を満たす振動演算子 $\alpha_k$ で表わされる。この節の議論を前章で調べた量子場に応用するにあたって，$\alpha_k$ は $a_k$ または $\alpha_k(\theta)$（$\theta$ は任意）を意味するものとしよう。$\alpha_k$ につけた運動量の添え字 $k$ は，量子場の系が無限個の振動子で構成されていることを示す；つまり，量子場の系には無限個の自由度がある。「$\vec{k}$ が連続変数であることが理由で正準演算子の連続集合が得られるのだろう」と，はじめは思うかもしれない。しかし，状況はもっと複雑である。その原因は，特定の運動量をもった波動関数は平面波 $\exp[i\vec{k}\cdot\vec{x}]$ であり，そのノルムが無限大であるという事実にある。その反映として，上記の交換関係に $\delta$ 関数が現われているのである。この交換関係は，波束を表わす2乗可積分関数によって空間的にならさないと意味をもたない。つまり，$\mathcal{H}(\alpha)$ 中のベクトルに作用する振動子演算子は，$\alpha_k$ ではなくて

$$\alpha_f = \int d^3k\, f(\vec{k})\alpha_k \tag{4.2}$$

なのである。ただし，$f(\vec{k})$ は2乗可積分関数：

$$\int d^3k |f(\vec{k})|^2 < \infty \tag{4.3}$$

である。

2乗可積分関数の規格直交完全系のよく知られた例として，調和振動子の波動関数がある。それは，主量子数によって区別されている。任意の2乗可積分関数は，振動子の波動関数で展開することができる。したがって，任意の2乗可積分関数の規格直交完全系は可算無限系である。それを $\{f_i(\vec{k})\}$ と記す。ただし，$i$ は $i = 1, 2, 3\cdots$ である。すると，振動子の可算無限系は次のようになる：

$$\alpha_i = \int d^3k f_i(\vec{k})\alpha_k. \tag{4.4}$$

これより

$$[\alpha_i, \alpha_j] = \delta_{ij} \tag{4.5}$$

が得られる。

2.1 節で見たように，$\alpha_k^\dagger$ は粒子数（演算子 $\alpha_k^\dagger \alpha_k$ の固有値）を増やすので，生成演算子と呼ばれる。

(4.4) のならし（ぼかし）の過程を施した演算子 $\alpha_i^\dagger$ は，波束状態にある粒子を生成する。平面波は規格化できない（つまり，2 乗可積分でない）ので，波束状態を採用する必要がある。粒子状態を作るためにはこの波束状態が必要であるが，**代数的計算には平面波演算子 $\alpha_k$ で十分であること**に以下で気づくであろう。たとえば，変換 (3.4)，(2.109) や (2.110) は波束演算子ではなくて平面波演算子 $\alpha_k$ を用いて表わされていた。この種の定式化が可能なのは，2 乗可積分関数が Fourier 変換可能だからである；いかなる波束演算子も平面波演算子の線形結合で与えられる。

以上，この節でわかったことは,「場の量子論では可算無限個の自由度を取り扱う」ということである [1]。

## 4.3 個数状態の連続集合

前節で，量子場系が無限個の自由度をもつことを見てきた。そこでは波束振動演算子 $\alpha_i$ を導入した。その $\alpha_i^\dagger$ によって生成される粒子状態を i 状態と呼ぼう。i 状態にある粒子の数を $n_i$ と記す。各数列 $n_1 n_2 n_3 \cdots$ は，その粒子数のセットで特定される状態を表わしている。この状態は個数状態と呼ばれるが，$|n_1 n_2 n_3 \cdots\rangle$ と記すことにする。粒子の任意の状態は，個数状態の重ね合せである。

まず始めに，フェルミオン部分集合と呼ばれている部分集合 ($|n_1 n_2 n_3 \cdots\rangle$; $n_i = 0$ or $1$) を考えよう。いま，$0.n_1 n_2 n_3 \cdots$ なる数の集合を考える。二進法で考えると，この集合は零以上で 1 より小さい実数全体を表わしている。実数は連続なので，フェルミオン部分集合は連続集合である；つまり非可算無限個の状態を含んでいる。

さて，個数状態の集合全体に目を移すと，その部分集合が連続なので，集合全体も連続集合であることがわかる [2]。

ところで，おのおのの状態の確率はきちんと定義されているべきであるから，状態ベクトルは規格化可能，つまり，いかなる物理的状態ベクトル空間も可算

個の基底ベクトルで張られていなければならない：分離可能（separable）。このことは，個数状態のすべての集合が物理的状態ベクトル空間の基底としては大きすぎることを意味している。すべての $i$ に対して $n_i = 0$ である状態を $|0\rangle$ と書き，真空と呼ぶことにする。ここで，集合 $(|n_1 n_2 n_3 \cdots\rangle; \sum n_i =$ 有限$)$ を考える。これは，可算集合であり，真空を含んでいる。この集合は，0 集合と呼ばれる [3, 4, 5, 1]。現実には有限個の粒子の状態に興味があるので，たとえその数がいかに大きくても，0 集合上に構築されたものを状態ベクトル空間として採用するのが適切である。この状態ベクトル空間は Fock 空間と呼ばれる。

しかし 0 集合の選択には無限個の可能性があるから，これは状態ベクトル空間がひとつだけしか存在しないということを意味するわけではない。その理由は，前章で見てきたように，真空 $|0\rangle$ の定義と消滅演算子 $\alpha_k$ の集合の選び方が唯一でないからである；たとえば，真空 $|0\rangle$ は，消滅演算子 $a_k$ に付随した $|0\rangle\rangle$ となったり， $\alpha_k(\theta)$ に付随した $|0(\theta)\rangle\rangle$ になったりする。凝縮の構造によって真空の選択には多くの余地があり，それぞれの真空に対応した 0 集合が存在する。

このように真空の選択に無限個の余地があるのは,「個数状態全体は連続集合をなしているが，Fock 空間の基本ベクトルは可算集合である」という事実のためである。連続集合から可算部分集合を抽出する方法は，無限通りある [3, 4, 5, 1]。

## 4.4 準粒子とダイナミカルマップ

場の量子論では，真空状態への粒子凝縮の構造によって区別された非同値表現が無数にあるので，ラグランジアンやハミルトニアンと正準交換関係を与えただけでは，特定の物理的解が抽出される保証はない。

金属中の電子の運動を考えよう。通常その運動は，常伝導電子の上向きと下向きスピン演算子 $a_{k,\uparrow}$，$a_{k,\downarrow}$ で記述される。この系が常伝導性を示すときは，その真空 $|0\rangle\rangle$ は常伝導電子が存在しない状態であり，その Fock 空間は $a_{k,\uparrow}$，$a_{k,\downarrow}$ に対する 0 集合の上に作られる。同じハミルトニアンで記述される同じ金属が，超伝導状態を示すこともあり得る。超伝導状態の真空 $|0\rangle$ は，Cooper 対（各対は，スピン上向きと下向きの電子で構成されている）の凝縮でできており，常伝導状態の真空とはフェルミオンの Bogoliubov 変換を通じて関連している。この Bogoliubov 変換の生成子は，(3.19) のスクイーズド状態の変換生成子 $G_B$ の中の $a_k$ と $\tilde{a}_k$ を，それぞれ上向きと下向きスピンの常伝導演算子

$a_{k,\uparrow}$ と $a_{k,\downarrow}$ で置き換えたものである。変換された演算子を $\alpha_{k,\uparrow}$，$\alpha_{k,\downarrow}$ と記すと，超伝導状態の Fock 空間はこれらの演算子に関する 0 集合上に作られることになる。常伝導状態と超伝導状態の Fock 空間は互いに非同値である。超伝導状態の真空には無限個の $(a_{k,\uparrow}, a_{k,\downarrow})$ 対（Cooper 対と呼ばれる）が凝縮している。

同様に，磁気モーメントをもつ量子場の系でも，磁気的スピンの真空への凝縮の仕方によって，常磁性相，強磁性相や他の多数の磁気秩序相が現われる。原子の量子場系では，気相，固相や他の多種の相が出現する。

これらの例から,「多数の異なる相の出現は，量子場の運動を異なる Fock 空間で記述していることに対応する」という一般的な結論が読み取れる。各 Fock 空間は，それぞれの真空への粒子凝縮の形によって区別され，異なる 0 集合を抽出しているのである。このことに関しては，次章で自発的対称性の破れのメカニズム（それによって多様な秩序状態が生まれる）を説明するところでまた触れることにする。真空への粒子凝縮は，さらに広い役割を演じる。6 章では，粒子凝縮によってどのようにして巨視的物体が作られるかを調べる。この線に沿ったアプローチをさらに発展させると，熱現象を扱う場の量子論の体系に行き着くことができる。

Fock 空間が $\alpha_k$ に関する 0 集合上に作られているとき，$\alpha_k^\dagger$ により生成される粒子を**準粒子**と呼ぶ。この Fock 空間内の任意のベクトル間でとられた演算子の行列要素には二つの作用がある；一つはケット状態中の粒子を消去する作用であり，もう一つはブラ状態中の粒子を生成する作用である。したがって，この作用は，いくつかの生成演算子 $\alpha_k^\dagger$ といくつかの消滅演算子 $\alpha_k$ を，すべての生成演算子があらゆる消滅演算子の左側へくるようにして作った積として表わすことができる。この形の積は**N 積**と呼ばれる。

この考察により，場の量子論のことばは二重構造をもっていることがわかる。基本的ことばは Heisenberg 演算子で構成されており，それによってラグランジアン，ハミルトニアンや場に対する正準交換関係が与えられる。一方，現象を説明することばは，準粒子演算子で構成されている。この考え方を数学の形式にのせるために，**ダイナミカルマップ**という概念が導入された [6, 1]。ある Heisenberg 方程式をみたすスカラー Heisenberg 場 $\psi(x)$ があったとしよう。この系の物理的状態は，エネルギー $\omega_k$ をもった自由粒子の生成・消滅演算子 $(\alpha_k, \alpha_k^\dagger)$ に付随した，Fock 空間 $\mathcal{H}(\alpha)$ 内の状態ベクトルによって記述される。つまり，Fock 空間 $\mathcal{H}(\alpha)$ は $\alpha_k$ にかかわる 0 集合上に作られているのである。

このことは,「Fock 空間 $\mathcal{H}(\alpha)$ 内の状態ベクトルに対するいかなる演算子の作用も，その演算子を演算子 $(\alpha_k, \alpha_k^\dagger)$ に関するN積で書いたものによって定義される」ということを意味している。そこで，Heisenberg 場を

$$\psi(x) = F[x : \alpha, \alpha^\dagger] \tag{4.6}$$

と記す。これによって，Heisenberg 演算子 $\psi$ がいかに $\mathcal{H}(\alpha)$ 内の状態ベクトルに演算するかが規定される。つまり，Fock 空間 $\mathcal{H}(\alpha)$ が決まると，$\psi$ は $F[x : \alpha, \alpha^\dagger]$ のように作用するのである。

準粒子の生成・消滅演算子をあらわに書くかわりに，しばしばその自由粒子場（準粒子場と呼ばれる）$\varphi(x)$ を用いる。そのときは，(4.6) は

$$\psi(x) = F[x : \varphi] \tag{4.7}$$

と記される。(4.6)，(4.7) ともに，$\psi$ のダイナミカルマップと呼ばれる [6, 1]。相対論的な場合には，$\varphi(x,t)$ の形は (1.43) 中の $a$ を $\alpha$ で置き換えたものである：

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \, \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} [\alpha_k e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_k t)} + \alpha_k^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_k t)}]. \tag{4.8}$$

非相対論的な場合には，この形の他に

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \, \alpha_k e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_k t)} \tag{4.9}$$

の形で与えられる場合もある。Dirac 場その他のように，さらに複雑な形の $\varphi$ もある。本書では，$\varphi$ は準粒子を意味し，$\psi$ は Heisenberg 場を意味するものとする。

ダイナミカルマップは，Fock 空間 $\mathcal{H}(\alpha)$ （$\alpha_k$ にかかわる 0 集合上に作られたもの）内の状態ベクトル間でとられた行列要素に対してのみ正しい。より正確にいうと，関係 (4.6) は,

$$\langle a|\psi(x)|b\rangle = \langle a|F[x : \alpha, \alpha^\dagger]|b\rangle \tag{4.10}$$

を意味する。ただし，$\langle a|$ と $|b\rangle$ は，$\mathcal{H}(\alpha)$ 内の任意のブラとケット・ベクトルを表わす。演算子間の関係が，特定のベクトル空間に属するベクトルの間でとられた行列要素に対してのみ成立するとき，**弱い関係**と呼ばれる。したがって，ダイナミカルマップは弱い関係である。この点を強調するときは，(4.6) を

$$\psi(x) \overset{\mathrm{w}}{=} F[x : \alpha, \alpha^\dagger] \tag{4.11}$$

と記すことにする。しかし，関係が弱い関係であることを強調したいとき以外は，弱い関係に対しても普通の等号を用いる。

## 4.5　時間に依存しない大域的演算子

3.3 節の (3.30) で，局所演算子の空間積分で与えられる演算子を考えた：

$$G = \int d^3x \rho(\vec{x}). \tag{4.12}$$

この形の演算子は大域的演算子と呼ばれる。この節では，時間に依存しない大域的演算子のダイナミカルマップを調べる。

まず始めに，$G$ のダイナミカルマップの形が

$$\int d^3k\, d^3l\, d^3p\; c(\vec{k},\vec{l},\vec{p})\alpha_k^\dagger \alpha_l^\dagger \alpha_p \alpha_{k+l-p} \tag{4.13}$$

で与えられる項に注目しよう。ただし，$c(\vec{k},\vec{l},\vec{p})$ は c 数関数である。運動量は (4.12) 中の空間積分によって保存する。この項の行列要素に寄与する位相空間は，時間に依存しないことにより要請されるエネルギー保存

$$\omega_k + \omega_l = \omega_p + \omega_{k+l-p} \tag{4.14}$$

のために縮小する。ただし，$\omega_k$ は運動量 $\vec{k}$ をもつ準粒子のエネルギーである。エネルギー保存のために，9 個の積分変数のうち 8 個だけが独立である。したがって，波束間でとったこの項の行列要素は，系のサイズ $L$ （これは無限大である）とともに $1/L$ のように消滅する。

双一次の項に対しては状況が異なる。準粒子のエネルギーが非負であるため，エネルギー保存によりこのダイナミカルマップには $\alpha_k \alpha_l$ や $\alpha_k^\dagger \alpha_l^\dagger$ の形の項は現われない。したがって，$\alpha_k^\dagger \alpha_l$ の形の項のみが得られる。運動量保存より $\vec{k} = \vec{l}$ が要請され，$\alpha_k^\dagger \alpha_k$ なる項のみが残る。これはエネルギー保存を自然に満たしている；エネルギー保存による位相空間の損失はない。結局，この項の行列要素のみが生き残るのである。こうして，時間に依存しない大域的演算子のダイナミカルマップには，2 次より高次のＮ積項はないことがわかった。

エネルギーが $\vec{k} = 0$ で零になる準粒子 $\chi$ が存在するとき：

$$\omega_0^\chi = 0. \tag{4.15}$$

$\chi$ 場の生成・消滅演算子に関して 1 次の項が生き残り得る。これは次のようにして示せる。この場の消滅演算子を $\chi_k$ と記そう。$\chi$ に関する 1 次の項の空間積分により運動量零からの寄与が取り出され，$\chi_k \delta(\vec{k})$ と $\chi_k^\dagger \delta(\vec{k})$ の形の項となる。これらの項は，(4.15) の関係により，自然にエネルギー保存を満たしている。したがってエネルギー保存に起因する位相空間の縮小もなく，これらの項が生き残るのである。(4.15) が成り立つとき，その粒子のエネルギーには飛びがないという。

以上をまとめると，時間に依存しない大域的演算子 $G$ のダイナミカルマップは，

$$G = \sum_{ij} \int d^3k [c_{ij}(k) \alpha_{i,k}^\dagger \alpha_{j,k} + (c\chi_k + c^* \chi_k^\dagger) \delta(\vec{k})] \tag{4.16}$$

の構造をもち得るのである。ただし，c 数係数 $c_{ij}(k)$ が消えないのは，同じエネルギーをもつ $(i,j)$ の項のみである：$\omega_{i,k} = \omega_{j,k}$. $\alpha_{i,k}$ は，$i$ 番目準粒子の消滅演算子である。$\chi_k$ は，エネルギーに飛びのない粒子の消滅演算子である。もしエネルギーに飛びのない粒子が存在しなければ (4.16) 中の $\chi^\dagger$ 項が現われないので，$G$ は真空を消滅させる ($G|0\rangle = 0$)。なお，関係 (4.16) は弱い関係である。

大域的演算子が真空を消滅しないとき（$G|0\rangle \neq 0$）には，この演算子は異常な振舞いをする。まず，真空が時空並進の下で不変のとき，状態 $G|0\rangle$ は規格化不可能となってしまう（Coleman の定理）。これは次のように示せる。関係 (4.12) を用いると

$$|G|0\rangle|^2 = \int d^3x \int d^3y \langle 0|\rho(\vec{x},t)\rho(\vec{y},t)|0\rangle \tag{4.17}$$

が得られる。真空の並進不変性より，

$$\langle 0|\rho(\vec{x},t)\rho(\vec{y},t)|0\rangle = F(\vec{x} - \vec{y}) \tag{4.18}$$

となる。

**問 1** (4.18) を導け。

ヒント：ハミルトニアン $H$ と運動量演算子 $\vec{P}$ は，それぞれ時間と空間に関する並進生成子である：

$$\rho(x) = e^{i[Ht - \vec{P}\cdot\vec{x}]} \rho(0) e^{-i[Ht - \vec{P}\cdot\vec{x}]}. \tag{4.19}$$

真空の並進不変性は $\exp[iHt]|0\rangle = |0\rangle$ と $\exp[i\vec{P}\cdot\vec{x}]|0\rangle = |0\rangle$ を意味するので，$\vec{P}|0\rangle = H|0\rangle = 0$ を得る。

結局，

$$|G|0\rangle|^2 = \int d^3yF(\vec{y})\int d^3x \tag{4.20}$$

を得るが，これは $G|0\rangle = 0$ でないかぎり無限大である。

さらに，$G$ が時間に依存せず真空を消滅しないときには，(4.16) に示したようにそのダイナミカルマップに $\chi$ 項が現われる。この項はデルタ関数を含んでいるので，2 乗可積分関数 $f(\vec{x})$ でならさないと意味をもたない。したがって，このような $G$ は，

$$\int d^3xf(\vec{x})\rho(\vec{x}) \tag{4.21}$$

で与えられる「ぼかし技巧」の下でしか定義されない異常演算子である。計算の最後の段階で $f \to 1$ の極限をとる必要がある。なお，3 章で異常演算子の例（時間に依存しないものではなかったが）をいくつか見た。

## 4.6 ハミルトニアンのダイナミカルマップ

### 4.6.1 準粒子自由ハミルトニアン

ハミルトニアン $H$ は時間並進の生成子であり自分自身と可換であるということは，ハミルトニアンが時間に依存しない大域的演算子であることを意味する。したがって，そのダイナミカルマップは (4.16) の形をしている。

この節では時間並進の下で不変な真空に話をかぎる。つまり $\exp[iHt]|0\rangle = |0\rangle$ であり，これより

$$H|0\rangle = 0 \tag{4.22}$$

を得る。したがって，そこには (4.16) 中にある 1 次の $\chi$ 項は現われない。行列 $c_{ij}(k)$ を対角化して，

$$H = \sum_i \int d^3k\omega_k^i \alpha_{i,k}^\dagger \alpha_{i,k} \tag{4.23}$$

としておく。表式の簡略化のため，以下では一つの場だけを扱うことにする。そのときは

$$H = H_0 \tag{4.24}$$

となる。ただし，

$$H_0 = \int d^3k\,\omega_k \alpha_k^\dagger \alpha_k \tag{4.25}$$

である。これは準粒子自由ハミルトニアンと呼ばれる。係数 $\omega_k$ は準粒子エネルギーである。

この結果を見て驚く読者もいるだろう。しかし，この関係は弱い関係として成立するだけであり，場が相互作用していないことを意味しているのではないことを注意しておく。これは，場の相互作用により粒子の反跳が起こることを否定するものではない；つまり，$\omega_k$ がくりこまれていれば，粒子の反跳はエネルギーには寄与しないことだけを意味しているのである。言い換えると，場の相互作用はその自己エネルギーへの寄与を通じて準粒子エネルギーに影響するが，系の全エネルギーは準粒子の線形和で与えられるということである。この性質は準粒子描像にとって本質的である。この関係が弱い関係であることを強調するためには，(4.24) の関係は

$$H \overset{\mathrm{w}}{=} H_0 \tag{4.26}$$

と記した方がよかろう。しかし，簡単のため通常の等号を用いることにする。

この問題をさらに理解するために，ここで (4.26) の別の導出を行っておく。簡単のため，真空も空間並進の下に不変であることを仮定する。この場合 (4.7) のダイナミカルマップは次の形で与えられる：

$$\psi(x) = \sum_n \int d^4x_1\, d^4x_2\, \cdots c(x - x_1, \cdots, x - x_n) : \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) : \tag{4.27}$$

ただし，記法 $:A:$ はN積を意味し，$\varphi$ は準粒子場を表わす。ここで重要なことは,「これは弱い関係であるので，空間 $\mathcal{H}(\alpha)$ 中の状態ベクトル間でとった行列要素を考えるべきで，しかも，その粒子状態は平面波でなく波束をとるべきだ」ということである。したがって，これらの行列要素に現われるすべての振動関数は，2乗可積分関数を掛けて積分される。そのため，$t = \pm\infty$ の境界領域からの寄与はなくなる。これは，このダイナミカルマップが Fourier 変換可能であることを意味している。

さて，Heisenberg 方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = [\psi(x), H] \tag{4.28}$$

を思い出そう。左辺では時間微分は展開係数 $c(x - x_1 \cdots)$ に作用する。部分積分を行っても境界面からの寄与はないので，時間微分は各 $\varphi$ に作用することになる。関係

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x) = [\varphi(x), H_0] \tag{4.29}$$

を利用すると，任意の演算子 $\psi$ に対して，

$$\langle a|[\psi, H]|b\rangle = \langle a|[\psi, H_0]|b\rangle \tag{4.30}$$

が得られる。ただし，$|a\rangle$ と $|b\rangle$ は，Fock 空間 $\mathcal{H}(\alpha)$ 中の任意のベクトルである。これより，

$$H \overset{\mathrm{w}}{=} H_0 + c\text{-数} \tag{4.31}$$

であることがわかる。$H|0\rangle = 0$ となるように $H$ 中の c 数定数を調整すると (4.26) が得られる。

### 4.6.2 準粒子間の反跳

前の小節では，ハミルトニアンは自由ハミルトニアンと弱い関係で等しいことを見た。すると,「全エネルギーは準粒子エネルギーの和で与えられるわけで,いったいどのようにして粒子の反跳が起こり得るのか？」という疑問がわいてくる。その答は，4.5 節で調べた時間に依存しない大局的演算子のダイナミカルマップを見るとわかる。そこでは，時間に依存しない大局的演算子 $G$ のダイナミカルマップにおいて，2 次より高次の N 積項からの $G$ の行列要素への寄与が $(1/L)$ の依存性をもつことを見た（$L$ は系のサイズ）。極限 $L \to \infty$ は行列要素の計算の最後でとるものとする。この議論を $H$ に適用すると，

$$H = H_0 + Q \tag{4.32}$$

を得る。ただし，$Q$ は，$1/L$ の次数の行列要素を与える高次の N 積項である。全エネルギーを計算するときは，極限 $L \to \infty$ をとると $Q$ の寄与は消える。しかし，$Q$ の寄与は S 行列には現われる。$Q$ を摂動相互作用として扱うときは，S 行列への $Q$ の寄与は $L$ の長さの反跳時間にわたって積分される。そのため，$L$ 無限大の極限をとっても，この寄与は残るのである。摂動計算によるハミルトニアンのダイナミカルマップ (4.26) の導出と S 行列の構造の考察は，[1] に書かれている。

ハミルトニアン (4.26) のダイナミカルマップは，$N\theta$ モデルや Lee モデルのように厳密に解けるいくつかのモデルで，その表式が求められている [7, 1]。

### 4.6.3 漸近場と準粒子

準粒子描像では，すべての演算子のダイナミカルマップは自由な準粒子演算子によって書かれる。それでは，それらの準粒子はいかなる種類の粒子なのだろうか。この節では，この疑問の解析をする。

この疑問を直観的なものとするため，粒子間の反跳を考えよう。すると，自由粒子描像が自然と現われてくる。粒子反跳とは，入射自由粒子によって与えられた初期状態と射出自由粒子が記述する終状態との間の遷移のことである。この自由粒子描像の起源は実験にある。そこでは，初期状態を決めるために入射自由粒子を特定し，終状態を決めるために射出自由粒子を特定する必要がある。このことより，これらの漸近粒子（入射粒子か射出粒子）が準粒子として利用できるだろうという示唆が得られたのである。

しかし，これだけでは疑問は解決しない。入射粒子が自由なのは，入射ビームを十分空間的に離して準備する実験条件のためであろう。しかし，射出粒子がどのようにして自由になるかは自明ではない。1950 年以前には，物理学者は，結合定数 $g$ を $\exp[-\epsilon|t|]g$ で置き換える，いわゆる断熱技巧を導入して，この描像を具体化した；$\epsilon$ を零にもっていく極限は計算の最後でとる。摂動計算ではよく用いられるが，この方法は人為的なものである。この技巧を正当化するには，相互作用が $t = \pm\infty$ の漸近領域で自然に消えてなくなることが，断熱因子なしに示されなければならない。

粒子間の相互作用が消える理由は波束描像に起因する。4.2 節で見たように，粒子状態は，規格化不可能な平面波状態ではなく，波束状態でなけばならない。一方，波束は時間的に広がりをもつ。時刻 $t$ での波束のサイズを $v(t)$ とする。これは，無限時間経つと発散する。この波束の中に他の粒子を見つける確率は $(1/v(t))$ である。したがって，二つの粒子がある点で出会う確率は $(1/v(t))^2$ で与えられる。しかし，粒子の出会う場所はどこでもよいので，二つの波束が重なる確率を求めるには $v(t)$ を掛けなければならない。結局，二つの波束が重なっている確率は $(1/v(t))$ に従って時間とともに減少する。このようにして，波束が広がるために相互作用効果が消滅するのである。波束の縁は一定速度（たとえば，相対論的な場合は光速度）で広がっていくので，その半径は時間に関して 1 次で増大する。したがって，$v(t)$ は $t^3$ に比例し，重なっている確率は $t^{-3}$ に従って時間とともに減少することになる。これより，S 行列中での相互作用の影響は $t^{-3/2}$ のように減少するのである。

**問 2** $A \to B + C$ のように二つに崩壊する粒子 $A$ を考える。これには，二つの崩壊により生成された $B$ と $C$ が再び結合して元の粒子 $A$ になるという再生過程がある。このため，崩壊した $A$ 粒子を見い出す確率が単純な指数則から少しずれる。上記の波束の振舞いに関する描像を用いて，1 回の再生過程によって再生された分に対応する $A$ 波動関数の振幅が $g^2t^{-3/2}$ に比例することを示せ。ただし，$g$ は崩壊結合定数である。

注意：この効果は J. Schwinger によって最初に発見された [8]。この論文にしたがって，広がる波束によるこの効果の直感的な解釈が Haag によって与えられた。

相互作用の漸近的振舞いに関するこの解析は，Haag によって発展された [9]。Lehmann，Symmanzik と Zimmermann はこの考えを，量子場の漸近極限として定式化した [10]。その主なアイデアは次のものである。準粒子エネルギーが $\omega_k$ で与えられた粒子の波束関数：

$$f(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} f(\vec{k}) e^{-i[\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t]} \tag{4.33}$$

を考える。(4.9) の形で与えられる非相対論的準粒子場 $\varphi$ から始めよう。Fock 空間に属する二つの状態間でとられた行列要素

$$F_{ab}(t) \equiv \langle a| \int d^3x f(x)\psi(x)|b\rangle \tag{4.34}$$

を考える。$f(x)$ は一粒子の波束関数である。Riemann-Lebesgue 定理により，$t \to \pm\infty$ 極限をとると $F_{ab}$ には，$\psi(x)$ の中から一粒子振動数 $\omega_k$ で振動している部分が現われる。したがってこの極限の下では，この行列要素は準粒子の行列要素となるのである。これによって準粒子消滅演算子 $\alpha_k$ が

$$\lim_{t\to\pm\infty} F_{ab}(t) = \langle a| \int d^3k f(\vec{k}) Z^{1/2}(\vec{k})\alpha_k|b\rangle \tag{4.35}$$

と定義される。ただし，$Z(\vec{k})$ は波動関数のくりこみ因子である。

相対論的な場合には，$\varphi$ は (4.8) で与えられる。この $\varphi$ には正負両方の振動部分が含まれているので，それぞれを分離するためにはさらに複雑な手続きが必要である。この手続きを見つけるため，関係

$$\int d^3x f(x) \overleftrightarrow{\partial_t} \varphi(x) = -i \int d^3k \sqrt{2\omega_k} f(\vec{k})\alpha_k \tag{4.36}$$

に注目しよう。ただし，$\overleftrightarrow{\partial} = \overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial}$ なる記法を導入した。これより，さきほどの $F_{ab}$ は

$$F_{ab}(t) \equiv \langle a| \int d^3x f(x) \overleftrightarrow{\partial_t} \psi(x)|b\rangle, \tag{4.37}$$

で置き換えるべきであることがわかる。したがって，

$$\lim_{t\to\pm\infty} F_{ab}(t) = Z^{1/2}\langle a| \int d^3k \sqrt{2\omega_k} f(\vec{k})\alpha_k|b\rangle. \tag{4.38}$$

を得る。この場合には，モデルの相対論的不変性のおかげで，$Z$ の $\vec{k}$ 依存性はない。

**問 3** (4.8) を用いて関係 (4.36) を導け。

極限 $t = -\infty$ は入射準粒子場を定義し，他方 $t = \infty$ は射出準粒子場を与える。この時間極限は特定の Fock 空間に属した行列要素に適応される極限操作なので，弱い極限である。射出粒子状態は入射粒子の Fock 空間に属しているので，準粒子場 $\varphi$ として入射場あるいは射出場のいずれかを選ぶことができる。

自由な漸近場で書かれたダイナミカルマップは，Haag 展開と呼ばれる [9]。これらの極限操作を用いて，Lehmann 等は Haag 展開に対する一般表式を導いた [10]。

### 4.6.4 入射粒子の選択

前の小節の考察より，入射（あるいは，射出）粒子は Heisenberg 場の漸近極限として得られるので，その選択は唯一であると思うかもしれない。しかし入射粒子の選び方が多数あるので，それは誤りである；超伝導状態にある系はそれに相応しい入射電子の選択を要求し，一方，常伝導状態にある系は別の入射電子を選択する。

これが可能なのは，前節で用いられた時間極限が弱い関係の下での極限だったからである。準粒子として入射自由粒子を採用したいとする。この極限は弱い関係でとられるので，極限をとる前に入射粒子が Fock 空間とどのように関連しているかを知らなければならない。そうすれば時間極限により正しい準粒子が再現される。つまり，消滅・生成演算子 $(\alpha_k, \alpha_k^\dagger)$（Fock 空間 $\mathcal{H}(\alpha)$ を構築するとき用いるもの）を準備する際，上記の極限操作で同一の $\alpha_k$ が得られるようにするのである。これは自己無撞着な手続きなのである。場の量子論では無限個の非同値 Fock 空間が存在するが，特定の Fock 空間が自己無撞着に選び出されるのである。

一つの系が示す多様な相にはそれぞれに相応しい準粒子があり，それが選出されその相における入射粒子や射出粒子を演じるのである。準粒子は自己無撞着に選出される。

### 4.6.5 く り こ み

この章で進められた非同値 Fock 空間の考察により，くりこみは，上に述べた自己無撞着な手続きの一部であることが理解できる。たとえば準粒子エネルギー $\omega_k$ は，自己無撞着に準備されなければならない。実際，適切な $\omega_k$ を準備しておかないと，前の小節で議論した時間極限操作によって準粒子演算子を

抽出することができなくなる。この議論は，次のような直観的議論によっても納得できる。量子場間の相互作用は粒子の反跳を起こすばかりでなく，自己エネルギーを生み準粒子エネルギーのずれをも引き起こすのである。波束が広がると相互作用は消えるが，自己エネルギーを生んだ相互作用の影響は，漸近極限でも消滅しないのである。相互作用ハミルトニアンにカウンター項を挿入することにより，非摂動ハミルトニアンの中に自己エネルギーを導入しなければならなかったことの理由はここにある。つまり，自己エネルギー・カウンター項を含んだ相互作用ハミルトニアンが，準粒子間の相互作用を記述するのである。これが，エネルギーのくりこみ（相対論的な場合には，質量のくりこみ）をする理由である。

結局，Fock 空間を自己無撞着に選び出すためにくりこみが必要なのである。このために，紫外発散のない物性物理学においてもくりこみが行われるのである。自己無撞着なくりこみにより，準粒子エネルギーを決定する方程式が得られる。この準粒子エネルギー方程式は相によって異なる；超伝導相の電子に対するエネルギー方程式は，常伝導相のものとは異なる。

くりこみが自己無撞着な操作であるという見方は，対称性の自発的破れの現象や多彩な秩序相の出現を理解する上で本質的な役割を演じる。これを調べるのが次章の主題である。

## 参 考 文 献


[1] H. Umezawa, H. Matsumoto, and M. Tachiki, *Thermo Field Dynamics and Condensed States*, (North-Holland, Amsterdam, 1982).

[2] K. O. Friedrichs, *Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields*, (Interscience, New York, 1953).

[3] L. Gärding and A. S. Wightman, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **40** (1954) 617.

[4] L. Gärding and A. S. Wightman, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **40** (1954) 622.

[5] A. S. Wightman and S. S. Schweber, *Phys. Rev.* **98** (1955) 812.

[6] L. Leplae, R. N. Sen and H. Umezawa, *Suppl. Prog. Theor. Phys.*, Communication issue for the 30th Anniversary of the Meson Theory by Dr. H. Yukawa, (1965) 637.

[7] J. Rest, V. Srinivasen, and H. Umezawa, *Phys. Rev.* **D3** (1971) 1890.

[8] J. Schwinger, *Ann. of Phys.* **9** (1960) 169.

[9] R. Haag, *Phys. Rev.* **112** (1958) 669.

[10] H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmermann, *Nuovo Cim.* **6** (1957) 319.

# 5

# 秩 序 状 態

## 5.1　自発的に破れた対称性

### 5.1.1　物理的描像

真空への粒子凝縮により引き起こされる魅惑的で重要な現象は，自発的対称性の破れである。対称性と秩序は互いに相補的な概念である。回転対称性がある場合には，他との違いが見出せる特別な方向というものがない。一方，特別な方向が意味をもつ状態は，方向にかかわる秩序を有する状態である。そのような秩序状態を作ると回転対称性は必然的に失われる。

ハミルトニアンやラグランジアンは回転不変であるが，真空が方向に関する秩序状態をもつ場合に魅惑的な状況が現われる。そのような秩序状態は，たとえば，上向きスピンの粒子が真空へ凝縮して巨視的なスピン・モーメントが現われる場合に作られる。スピンに対して平行な方向と垂直な方向は異なった性質を示す。これが自発的に回転対称性が破られる現象であり，スピン方向がそろった秩序状態が出現する。この場合二つの特性が直感的に期待される。

一つは元からあった運動の回転不変性に由来するもので，スピンの上向き方向がいずれの向きでもよいというものである。すなわち，異なった方向に対応する巨視的なスピンのすべての状態は同一のエネルギーをもち，その同一のエネルギーの真空が連続集合をなすのである。この**縮退した真空の連続集合** $|0(\theta)\rangle$ の存在が，第一の特性である。ここで，$\theta$ は巨視的モーメントの向きを表わす

パラメータである。この種の真空は，たとえば，上向きスピンをもった粒子の凝縮によって実現する。

もう一つの特性は，そのような秩序状態の安定性に由来する。この粒子凝縮状態にあるスピンが，巨視的モーメントの向きからそれたとする。秩序状態が安定であるためには，他の粒子がスピン方向のこのずれを感知し，ずれたスピンの方向を修正する方策をとらねばならない。そのためには，凝縮状態にある粒子間の情報交換をつかさどる仕掛けが必要である；この情報交換の仕掛けにより，系は巨視的モーメントからの局所スピンのいかなるずれをも修正できるのである。この仕掛けとは，全領域にわたって伝播できる波動である。場の量子論では，この領域はふつう無限大である。粒子と波動にかかわる量子論のことばを借りると，これは波動にまつわるある種の量子の存在を意味する。波動の伝播領域が無限大であることは，この粒子の最小エネルギーが零であることを意味し，この粒子のエネルギーには（真空との間に）飛びがないこと（相対論的モデルでは，質量なしのエネルギー）を意味する。

この種のよく知られた例は強磁性体である。磁気モーメントのとりうる角度に対応するすべての強磁性体は，エネルギーが縮退した連続集合を形成し，この系にはスピン波あるいはマグノンと呼ばれるエネルギーに飛びのない粒子が存在することが知られている。縮退した真空やエネルギーに飛びのない粒子の存在は，自発的に対称性の破れた系すべてに対する共通の性質である。

### 5.1.2 数学的描像

前節の直観的な描像を数学的な形式にまとめることはたやすい。それは，4.5節で紹介した時間によらない大域的演算子の構造の解析により，ただちに行うことができる。

Heisenberg 場 $\psi(x)$ に対するラグランジアンが，連続パラメータ $\theta$ に依存する連続変換

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x, \theta) \tag{5.1}$$

の下に不変であったとしよう。この変換の生成演算子を $N$ と記す：

$$\psi'(x) = e^{i\theta N}\psi(x)e^{-i\theta N}. \tag{5.2}$$

$N$ が大域的演算子であると仮定しよう；すなわち，この演算子が，(4.12) のように局所演算子の空間積分で与えられるとするのである。後の節で，個々の変換に属する大域的演算子をいかにして作るかを示す。さて，ラグランジアンの

不変性よりハミルトニアンの不変性が導かれる：$H = \exp[iN\theta] H \exp[-iN\theta]$. すなわち，

$$[H, N] = 0 \tag{5.3}$$

である。これより，$N$ は時間によらないことがわかる。$N$ は，時間に依存しない大域的演算子なのである。これが不変性に関する話であり，真空の選びかたに依存してこの不変性がどのように現われるかを示している。不変性の出現の仕方を対称性と呼んでいる。

この変換：

$$e^{i\theta N}|0\rangle\rangle = |0\rangle\rangle \tag{5.4}$$

で不変な真空を $|0\rangle\rangle$ と記す。これは，条件

$$N|0\rangle\rangle = 0 \tag{5.5}$$

と同等である。

有限密度の粒子のある種の凝縮が，$N$ 変換に関して不変でない新しい真空 $|0\rangle$ を形成したとしよう：

$$N|0\rangle \neq 0. \tag{5.6}$$

これは，この真空上に作られた Fock 空間では $N$ 対称性が自発的に破れていることを意味する。(5.3) と (5.6) の二つの条件が，自発的に破れた対称性にまつわる現象を決定する。

$N$ は時間に依存しないので，そのダイナミカルマップは (4.16) の形で与えられる：

$$N = \int d^3k [c_{ij}(k) \alpha^\dagger_{i,k} \alpha_{j,k} + (c\chi_k + c^* \chi^\dagger_k)\delta(\vec{k})]. \tag{5.7}$$

ただし，$(i, j)$ が同一のエネルギーに属する場合 $(\omega_{i,k} = \omega_{j,k})$ のみ，$c_{ij}(k)$ は零でない。$\alpha_{i,k}$ は $i$ 番目準粒子の消滅演算子であり，$\chi_k$ はエネルギーに飛びのない粒子の消滅演算子である。もしエネルギーに飛びのない粒子が存在しないとすると (5.7) 中に $\chi^\dagger$ 項が現われないので，$N$ は真空を消滅させる。したがって，不変性を保たない真空には，エネルギーに飛びのないボソン（その自由場を $\chi(x)$ と記す）の存在が必要なのである。これより Goldstone 定理が得られる：自発的に対称性の破れたいかなる状態にも，エネルギーに飛びのないある種の場 $\chi$ が付随する。この定理は，物性物理学の多くの実例（結晶中のフォノン，強磁性体中のマグノンなど）により示されている。1961 年頃，南部や Goldstone，その他の物理学者により，これは一般定理として把握された [1, 2]。

それで，これは南部-Goldstone 定理と呼ばれ，$\chi$ 粒子は南部-Goldstone（NG）粒子と呼ばれている。この定理の証明は論文 [3] で初めてなされた。多くの物理学者の手によりこの証明はさらに磨き上げられた。この小節では，異なる形の証明を用いた。その証明が NG 粒子の存在を示すばかりでなく，対称性の破れの形に関して一般規則を与え，対称性の再構成（symmetry rearrangement）という認識に導くからである。この点は次の小節で吟味する。

4.5 節で調べたように，真空を消去せずしかも時間に依存しない大域的演算子は，異常演算子である。したがって，$N$ は異常演算子である；真空 $|0\rangle$ 上に作られた Fock 空間内のベクトルに演算すると，その Fock 空間にはもはや留まれない。こうして，ベクトル $|0(\theta)\rangle = \exp[i\theta N]|0\rangle$ が真空の連続集合を形成できるのである。$N$ はハミルトニアンと可換なため，真空エネルギーは変化を受けない。したがって，この集合は，エネルギーが縮退した真空の連続集合（その各要素上に Fock 空間が作られる）である。こうして，Fock 空間の連続集合 $\{\mathcal{H}(\theta)\}$ が得られた。この状況は，3 章でコヒーレントあるいはスクイーズド状態を調べたときとまったく同様である。

こうして，前節の直感的解釈が数学的形式で再現された。唯一つの微妙な点は，使われている演算子 $N$ が異常演算子なので，ぼかし技巧のような数学的で形式的な細工が必要になる点である。後の節で，Ward-高橋の関係 [4, 5] を利用して，南部-Goldstone 定理のもう一つの証明を行う。ともかく，$N$ を用いると，自発的に破れた対称性に関する理解が簡単になるので，次の小節でも $N$ を用いることにする。

### 5.1.3 対称性の再構成

変換 $\exp[i\theta N]$ を施すと，(5.7) の右辺第 1 項が同一エネルギー準粒子間の混合を引き起こす。そのため，これらの粒子は,（もとの $N$ 対称性とは異なった）実際に観測される対称性の表現を形成する。コヒーレント状態の場合に 3 章で見たように，(5.7) の第 2 項が南部-Goldstone 場 $\chi$ の変位を誘起する：

$$\chi(x) \to \chi(x) - \theta c. \tag{5.8}$$

つまり，$N$ 変換は，エネルギーが縮退した準粒子どうしの混合として，あるいは南部-Goldstone 場の変位として観測にかかるのである。我々はこれで一般的な定理を手に入れた：**自発的対称性の破れが起こると，エネルギーに飛びのない場が必ず現われ，そのボソン変位によって対称性の変換が誘起される。その際，エネルギーの縮退した準粒子場の混合も起こる。**

このように，自発的に対称性が破れる現象は，Heisenberg 場のレベルを観測レベルへ移行する際に起こる，対称性の形態変化と理解することができる。これは，**対称性の再構成**と呼ばれている [6, 7, 8]。対称性が破れると準粒子のエネルギー・スペクトル間に差が生じ，そのエネルギーの違いのため粒子の混合が不可能になるので，$N$ 変換で不変な縮退なしの場（singlet field）が現われることが多い。これは，凍結現象と呼ばれる。

対称性の再構成は，次のように一般的に定義される。ラグランジアン（または，ハミルトニアン）が，連続パラメータ $\theta$ に依存するある連続変換：

$$\psi \to \psi' = Q[\psi : \theta] \tag{5.9}$$

に関して不変であるとしよう。いま，Heisenberg 場 $\psi$ のダイナミカルマップを，準粒子場 $\varphi$ を用いて

$$\psi(x) = \psi(x : \varphi) \tag{5.10}$$

と書く。連続変換

$$\varphi \to \varphi' = q[\varphi : \theta] \tag{5.11}$$

が

$$Q[\psi(x) : \theta] = \psi(x : q[\varphi(x) : \theta]) \tag{5.12}$$

なる $Q$ 変換を誘起したと仮定する。このとき，$Q$ 対称性が $q$ 対称性へ再構成されたという。

自発的に破れた対称性に関するこの議論では，$N$ 対称性が再構成されることによりエネルギーが縮退した準粒子間に混合が起こり，エネルギーに飛びのない場 $\chi$ の変位を引き起こすのである。本質的なのは $\chi$ 場の変位である；粒子の混合は凍結機構のため必ずしも起きるわけではない。

ボソン場が変位を受けると Bose 凝縮が起こることを 3 章で見た。したがって，縮退した真空の連続集合が引き起こすのは $\chi$ 変位であり，それによって NG 粒子の凝縮が取り仕切られるのである。

以下の節で，秩序状態と対称性の再構成の例をいくつか紹介する。

### 5.1.4 ボソン変換

ボソン準粒子場 $\varphi$ を考える。これは自由場なので，線形斉次微分方程式：

$$\Lambda(\partial)\varphi(x) = 0 \tag{5.13}$$

とボソン交換関係を満たす。この方程式は，変換

$$\varphi(x) \to \varphi(x) + f(x) \tag{5.14}$$

に関して不変である。ただし，c 数関数 $f(x)$ も同じ自由場の方程式：

$$\Lambda(\partial) f(x) = 0 \tag{5.15}$$

を満たすものとする。これをボソン変換という。ボソン交換関係もこのボソン変換の下に不変である。3 章で議論したコヒーレント状態を思い出すと，ボソン変換によって準粒子の凝縮が起こることがわかるであろう。次章では場の量子論における巨視的物体の構築にとって，ボソン変換が決定的な役割を演ずることを示す。

$\chi$ 場のエネルギーに飛びがない（つまり，$\vec{k} = 0$ のとき $\omega_k = 0$）ので，その自由場方程式

$$\Lambda_\chi(\partial)\chi(x) = 0 \tag{5.16}$$

には，性質

$$\Lambda_\chi(0) = 0 \tag{5.17}$$

がある。したがって，あらゆる c 数定数が $\chi$ の自由場方程式を満たす。そのため，定数 $c$ に対する (5.8) のボソン変位は，ボソン変換 (5.14) の特別な場合である。したがって上述の対称性の再構成は，NG ボソンのボソン変換をたずさえていることがわかる。これはいわば，秩序状態におけるトポロジカルな舞台（生成物）の話への序曲である。次章で学ぶことであるが，秩序状態中の欠陥の起源は，ほとんどボソン変換で誘起された NG ボソンの凝縮にある。

### 5.1.5　低エネルギー定理 I

$N$ 変換不変性には必ず南部-Goldstone ボソンがともなうということは，次の定理にまとめられる：**$N$ 変換で不変な演算子のダイナミカルマップは，$\chi$ をその導関数の形でしか含まない。** $I_N$ を $N$ 変換で不変な演算子としよう：

$$[I_N, N] = 0. \tag{5.18}$$

NG 場以外のすべての準粒子場を $\phi$ と記す。このとき上記の定理は，次のような $I_N$ のダイナミカルマップで表わされる：

$$I_N = I[\phi, \partial\chi]. \tag{5.19}$$

つまり，ソフト NG ボソンは不変演算子の行列要素には寄与しないのである。この定理は，低エネルギー定理と呼ばれている [8]。

場の量子論では，粒子の相互作用は，入射準粒子場の射出場への遷移として記述される。これは多くの書物で扱われているので，ここでは説明しない。ところで，入射場と射出場は S 行列と呼ばれる演算子で互いに関連している。S 行列はすべての不変変換に関して不変である。したがって，S 行列は $N$ 変換の下に不変である。上述の低エネルギー定理を S 行列に適用すると，

$$S = S[\phi, \partial\chi] \tag{5.20}$$

を得る。これは，**ソフト NG 粒子がいかなる相互作用にも寄与しない**ことを示している [8]。この定理をパイオン物理におけるカイラル対称性の理論（そこでは，パイオンが南部-Goldstone 粒子である）に適用すると，零エネルギー・パイオンはいかなる相互作用にも寄与しないという Adler 定理が得られる [9]。この低エネルギー定理がマグノンに適用されると，低エネルギー・マグノンの S 行列要素は他の要素に比べて小さいという Dyson の結果と一致する [10]。

### 5.1.6 生成子と Nöther 流

この節では，ラグランジアンが与えられたとき，ある変換に対する生成子 $N$ をいかにして見つけるのかという問題を議論する。ただし，この章では，$N$ 変換に関してのラグランジアンの不変性は仮定しないことにする。場の正準共役はラグランジアンによって決まるので，$N$ の構造はラグランジアンに依存する。

ある連続変換の微小変換（微小パラメータ $\theta$ に依存する）

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x) + \theta\delta\psi(x) \tag{5.21}$$

を考えよう。簡単のため，時空座標 $x$ が変化を受けないような変換のみを考える。$x$ の変化も考慮に入れた一般論は場の量子論の多くの書物に見つけることができる（たとえば，[8] の 227 頁参照）。ラグランジアン密度の変化を $\theta\delta\mathcal{L}(x)$ としよう：

$$\theta\delta\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}[\psi'(x)] - \mathcal{L}[\psi(x)]. \tag{5.22}$$

**問 1** 関係

$$\delta\mathcal{L}(x) = \partial^\mu N_\mu \tag{5.23}$$

を導け。ただし，

$$N_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^\mu}\delta\psi \tag{5.24}$$

である。ここに，$\psi_\mu = \partial_\mu \psi$ とおいた。
ヒント：ラグランジアンで与えられる Euler 方程式を利用せよ。

関係 (5.23) を Nöther の定理と呼び，$N_\mu$ を Nöther 流と呼ぶ [11]。$\psi$ の正準共役を $\pi_\psi$ と記すことにすると，$\pi_\psi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\psi}$ で与えられる。したがって，

$$N_0(x) = \pi_\psi(x)\delta\psi(x) \tag{5.25}$$

である。

さて，

$$N(t) = \int d^3x N_0(x) \tag{5.26}$$

を導入し，$\psi$ や $\pi_\psi$ を用いてこれを表わすとき $\delta\psi$ には $\pi_\psi$ が含まれないと仮定する。このとき，(5.26) は

$$[\psi(x), N(t)]_{t_x=t} = i\delta\psi(x) \tag{5.27}$$

となる。これより，$N(t)$ が変換 $\psi \to \psi'$ の生成子であることがわかる。このように，変換が与えられると生成子を作ることができるのである。なお，$N$ は**大域的演算子**である。Nöther 定理 (5.23) より

$$\dot{N} = \int d^3x \delta\mathcal{L}(x) \tag{5.28}$$

がわかる。

### 5.1.7 Ward-高橋の関係

**問 2** 以下の関係を示せ。

$$\frac{\partial}{\partial t_x}\langle 0|T[A(x)B(y)]|0\rangle = \delta(t_x - t_y)\langle 0|[A(x), B(y)]|0\rangle + \langle 0|T[\dot{A}(x)B(y)]|0\rangle \tag{5.29}$$

ヒント：関係

$$\langle 0|T[A(x)B(y)]|0\rangle = \theta(t_x - t_y)\langle 0|A(x)B(y)|0\rangle + \theta(t_y - t_x)\langle 0|B(y)A(x)|0\rangle \tag{5.30}$$

と

$$\frac{\partial}{\partial t_x}\theta(t_x - t_y) = \delta(t_x - t_y) \tag{5.31}$$

を用いよ。

この過程をくり返すと，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\langle 0|T[N(t),\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)]|0\rangle \\
&\quad=\sum_{a=1}^{n}\delta(t-t_a)\langle 0|T[\psi(x_1)\cdots[N(t),\psi(x_a)]\cdots\psi(x_n)]|0\rangle \\
&\qquad+\langle 0|T[\dot{N}(t)\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)]|0\rangle
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

が証明される。(5.27) と (5.28) を考慮すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\langle 0|T[N(t)\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)]|0\rangle \\
&\quad=-i\sum_{a=1}^{n}\delta(t-t_a)\langle 0|T[\psi(x_1)\cdots\delta\psi(x_a)\cdots\psi(x_n)]|0\rangle \\
&\qquad+\int d^3x\langle 0|T[\delta\mathcal{L}(x)\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)]|0\rangle
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

が得られる。両辺を全時間領域にわたって積分する。伝播領域が無限大の粒子はないと仮定して，$t=\pm\infty$ からの寄与を落とすと，

$$
\begin{aligned}
&\sum_a i\langle 0|T[\psi(x_1)\cdots\delta\psi(x_a)\cdots\psi(x_n)|0\rangle \\
&\qquad=\int d^4x\langle 0|T[\delta\mathcal{L}(x)\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)]|0\rangle
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

を得る。これらは Ward-高橋の関係と呼ばれ，モデルに依存しない対称性の解析にしばしば有用である。

### 5.1.8 θ 選定

(5.28) によると，ラグランジアンが $N$ 変換の下に不変であるとき，$N$ は時間に依存しない大域的演算子のように見える。したがって，$N$ 対称性が自発的に破れたとき，つまり

$$
N|0\rangle\neq 0 \tag{5.35}
$$

のときは，$N$ は異常演算子である。この場合，(5.28) の導出は微妙なものになる。(5.28) の導出の際，$\vec{\nabla}\vec{N}$ の空間積分を無視した。しかし，$N$ 対称性が自発的に破れると南部-Goldstone 場 $\chi$ が現われ，その影響は無限遠におよぶ。そのため，$\nabla N$ の空間積分が本当に消えるのかどうか明らかではない。この困難

を避けるために，次のような技巧を用いる。$N$ 変換に関して不変でない演算子 $\Phi(x)$ を導入する：

$$\delta\Phi(x) = i[N, \Phi(x)] \neq 0 \tag{5.36}$$

$N$ 不変なラグランジアン密度に，$\epsilon\Phi(x)$（$\epsilon$ は微小量）を加える。つまり，ラグランジアンの構造は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \epsilon\Phi(x) \tag{5.37}$$

となる。ただし，$\mathcal{L}_N$ は元の $N$ 不変なラグランジアンである。対称性を破っている項 $\epsilon\Phi$ が，対称性の破れ方を特定する（強磁性体の例では，これは磁気モーメントの方向を選ぶことに対応している）。結局，

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon\delta\Phi \tag{5.38}$$

を得る。$\epsilon$ が有限であるかぎり $\chi$ 場 のエネルギーには飛びがあり，$\nabla N$ の空間積分を無視しても問題ない。計算の最後の段階では極限 $\epsilon \to 0$ をとって，$N$ 不変性を回復する必要がある。表式 (5.34) からわかるように，この極限で特定のパラメータ $\theta$ が選定される。このため，$\epsilon\Phi$ 項は $\theta$ 選定項と呼ばれる。

$\theta$ 選定項の役割を理解するために，スピン回転対称性の自発的破れを思い浮かべてみよう。この場合，パラメータ $\theta$ はスピンの方向を表わす。スピン密度演算子を $s_i$（$i = 1, 2, 3$）とし，$\theta$ 選定項として $\epsilon s_3$ を採用する。全ラグランジアンは第 3 軸の回りの回転に関して不変である。このとき，第 3 軸方向に巨視的なスピン・モーメントをもつ系が生成され，$\epsilon$ が消える極限をとっても，第 3 軸方向に巨視的スピンが存在する状態を表わす真空が残る。つまり，すべての可能な方向に対応する縮退した真空 $|0(\theta)\rangle$ 全体の中から，$\epsilon$ が零の極限でも，この特定の方向が選び出されるのである。この場合は，$\langle 0|s_3|0\rangle$ が巨視的なスピン・モーメントである。$S_1$ や $S_2$ で誘起される変化 $\delta S_3$ は，それぞれ $S_2$，$-S_1$ である。2 度 $S_1$ や $S_2$ をくり返し用いて起こる二重変化 $\delta\delta S_3$ は，$(-S_3)$ にもどる。この真空期待値は，巨視的スピン・モーメントの符号を替えたものとなる。

この状況を一般化して，$\epsilon \to 0$ の極限でも，

$$v \equiv -\langle 0|\delta\delta\Phi(x)|0\rangle \neq 0 \tag{5.39}$$

となるような $\Phi$ を選ぶ。この $v$ なる量は $\theta$ 選定項によって選ばれた特定の秩序を特徴づけるので，秩序パラメータと呼ばれる。

さて，Ward-高橋の関係 (5.34) に (5.38) 代入し，$\psi$ を $\delta\Phi$ で置き換えると

$$iv = -\epsilon \int d^4x \langle 0|T[\delta\Phi(x)\delta\Phi(y)]|0\rangle \tag{5.40}$$

を得る。右辺の被積分関数は $(t_x - t_y)$ の関数であるから，これは $t_y$ には依存しないことに注意しよう。

2 点因果関数は必ず Fourier 展開でき，

$$\langle 0|T[A(x)B(y)]|0\rangle = \int d^4k e^{ik^\mu(x-y)_\mu} \int d\kappa \frac{\rho(\vec{k},\kappa)}{k_0^2 - \kappa^2 + i\epsilon_F} \tag{5.41}$$

また

$$\langle 0|T[A(x)B(y)]|0\rangle = \int d^4k e^{ik^\mu(x-y)_\mu} \int d\kappa \frac{\rho(\vec{k},\kappa)}{k_0 - \kappa + i\epsilon_F} \tag{5.42}$$

という形になることが知られている。ただし，$\epsilon_F$ は，Feynman 微小量である（この二つの表式のうちどちらを採用するかは，準粒子場の種類に依存する；正の振動数のみを含むか，あるいは正負両方の振動数部分を含むかによるのである）。この表式を (5.40) に応用すると，$\rho(0,\kappa)$ は，$\epsilon$ の極限において，$\kappa^2 = Z\epsilon$ や $\kappa = Z\epsilon$ （どちらになるかは，上の表式のいずれを使ったかによる。$Z$ は定数である）の点で，零になってはならないことがわかる。そうでないと，$v$ が零になってしまうからである。このことより，$\delta\Phi$ のダイナミカルマップには飛びのないエネルギーの線形項があることがわかる。つまり，エネルギーに飛びのない状態が存在するのである。これは南部-Goldstone 定理のもう一つの証明となっている。

### 5.1.9 この節のまとめ

ここでこの節の簡単なまとめをしておく：

（１）：自発的に破れた対称性（SBS）は，時間に依存しない大域的異常演算子（これは真空を消去しない）によって生成される。

（２）：その演算子のダイナミカルマップには２種類の項が含まれる；同じエネルギーをもつ準粒子を混合させる項と，南部-Goldstone（NG）粒子と呼ばれる，エネルギーに飛びのない粒子の変位を誘起する項とである。後者のためにエネルギーに飛びのない粒子が現われる。

（３）：つまり，SBS とはまさに Heisenberg 場の基礎レベルから観測にかかる準粒子のレベルへ移る際の対称性の形態変化なのである。

（4）：NG 粒子の変位は，ボソン変換（これによって，コヒーレント状態と同様な NG 粒子の凝縮が規定される）としての機能をもつ。そのため，この生成子は異常になる。

（5）：NG 場変位の下での不変性が，低エネルギー定理を意味する。つまり，不変な演算子のダイナミカルマップには NG 場の導関数しか現われない。

（6）：生成子は Ward-高橋の関係を満たし，Nöther 流から導き出せる。

（7）： $\theta$ 選定項により選びだされた対称性の破れの形態は，秩序パラメータによって特定する。

## 5.2 スカラーモデルにおける位相対称性の破れ

### 5.2.1 は じ め に

この節では，複素スカラー場のモデルを用いて，一般的な考え方を説明する。論点を明確にするためにラグランジアンを与えるが，以下の議論はその大部分が，また技術的な面はそのすべてが，いかなるモデルにも共通のものである。

### 5.2.2 モ デ ル

考察するラグランジアン密度は，

$$\mathcal{L}_N = -\partial^\mu \psi^\dagger \partial_\mu \psi + \mu^2 \psi^\dagger \psi + \lambda(\psi^\dagger \psi)^2 \tag{5.43}$$

である。この場合，ハミルトニアンは，

$$H = \int d^3x [\dot{\psi}^\dagger \dot{\psi} + \nabla \psi^\dagger \nabla \psi - \mu^2 \psi^\dagger \psi - \lambda(\psi^\dagger \psi)^2] \tag{5.44}$$

となる。$\psi$，$\psi^\dagger$ の正準共役はそれぞれ $\dot{\psi}^\dagger$，$\dot{\psi}$ である：

$$[\psi(x), \dot{\psi}^\dagger(y)]\delta(t_x - t_y) = i\delta(x - y). \tag{5.45}$$

$\mathcal{L}_N$ は，位相変換：

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\theta}\psi(x) \tag{5.46}$$

に対して不変である。微小な $\theta$ に対して，この変化は

$$\delta\psi = i\psi, \quad \delta\psi^\dagger = -i\psi^\dagger \tag{5.47}$$

となる。

### 5.2.3 Nöther 流と生成子

(5.24) により，Nöther 流は

$$N_\mu = i\psi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi \tag{5.48}$$

である。ただし，$\overleftrightarrow{\partial}_\mu = \overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu$ なる記法を用いた。この場合，生成子は，

$$N = -i \int d^3x [\psi^\dagger \dot{\psi} - \dot{\psi}^\dagger \psi] \tag{5.49}$$

となる。

### 5.2.4 位相対称性の再構成

南部-Goldstone 定理によると，エネルギーに飛びのない場 $\chi$ が存在するはずである。相対論的モデルを考察しているので，$\chi$ は質量なしの方程式：

$$\partial^2 \chi = 0 \tag{5.50}$$

を満たしている。

c 数ボソン変換

$$\chi \to \chi + c\theta \tag{5.51}$$

（$c$ は c 数）が (5.46) の位相変換を誘起するので，$\psi$ のダイナミカルマップは

$$\psi = e^{i(1/c)\chi} F[\phi, \partial\chi] \tag{5.52}$$

の形になる [6, 8]。ただし，$\phi$ は南部-Goldstone 以外の準粒子である。位相因子に現われているので，$\chi$ は位相場と呼ばれている。$\chi$ の変位が位相変換全般を担っているので，他の準粒子場 $\phi$ は位相変換で変化してはならない。以下では，南部-Goldstone 場の他にはただ一つの準粒子 $\phi$ しかないものと仮定する。

ところが，準粒子といえども，$\phi$ は南部-Goldstone ボソンへと緩和してしまうので不安定であることが計算の結果わかる。つまり，高次の相関を考慮すると，この準粒子は消えるべきなのである。したがって，厳密にいうと，ダイナミカルマップ (5.52) は

$$\psi = e^{i(1/c)\chi} F[\partial\chi] \tag{5.53}$$

となるべきなのである。ただし，低次の摂動の範囲では，以下で見るように $\phi$ が現われる。

### 5.2.5 秩序パラメータと $\theta$ 選定

$\theta$ 選定項 $\epsilon\varPhi$ の $\varPhi$ として，位相変換に関して不変でない $(1/2)(\psi+\psi^\dagger)$ を用いよう。この場合，

$$\chi_H \equiv \delta\varPhi = i\frac{1}{2}(\psi-\psi^\dagger) \tag{5.54}$$

と

$$\delta\delta\varPhi = -\frac{1}{2}(\psi+\psi^\dagger) \tag{5.55}$$

となる。つまり，$\psi = \varPhi - i\chi_H$ である；$\varPhi$ が $\psi$ の実数部で，$\chi_H$ は虚数部である。(5.39) によると，秩序パラメータは

$$v = \frac{1}{2}\langle 0|\psi+\psi^\dagger|0\rangle \tag{5.56}$$

で与えられる。こうして，ダイナミカルマップ

$$\varPhi = v + Z_1\phi + \cdots \tag{5.57}$$

$$\chi_H = Z_2\chi + \cdots \tag{5.58}$$

を得る。ただし，$Z_1$，$Z_2$ は c 数係数である。また，$\cdots$ は，高次 $N$ 積を表わす。結局，ダイナミカルマップ (5.52) は，

$$\psi = (v + Z_1\phi) - iZ_2\chi + \cdots \tag{5.59}$$

の形にまとめられる。位相は $v$ が実数となるように選ぶ。

### 5.2.6 流れのダイナミカルマップ

$N$ は $\chi$ のボソン変換 (5.51) を生成する。$\chi$ の正準共役が $\dot{\chi}$ である：

$$[\chi(x), \dot{\chi}(y)]\delta(t_x - t_y) = i\delta(x-y) \tag{5.60}$$

このことから，$N$ のダイナミカルマップは，

$$N = \int d^3x c\dot{\chi} \tag{5.61}$$

の形で与えられる。$N$ は $N_0$ の空間積分であるので，$N_0$ のダイナミカルマップは

$$N_0(x) = c\dot{\chi} + \cdots \tag{5.62}$$

である。したがって，Nöther 流保存則 $\partial^\mu N_\mu = 0$ と，質量なし方程式 $\partial^2\chi = 0$ より，次のような流れに対するダイナミカルマップを得る：

$$N_\mu(x) = c\partial_\mu\chi(x) + \cdots. \tag{5.63}$$

### 5.2.7 ゆらぎの効果

南部-Goldstone 場 $\chi$ のエネルギーには飛びがないので，低い運動量の $\chi$ 粒子が短時間に多く生成され，ゆらぎに重要な影響を与えることがある。ここでは，秩序パラメータ $v$ へのゆらぎの影響を調べてみる。ダイナミカルマップ (5.52) によると，秩序パラメータは，表式

$$v = v_s\langle 0|e^{i\frac{1}{c}\chi(x)}|0\rangle \tag{5.64}$$

で与えられる。ただし，$v_s$ は $F[\phi, \partial\chi]$ からの寄与である。今はソフト $\chi$ 粒子のみを考えているので，$F[\phi, \partial\chi]$ を近似して $F[\phi, 0]$ で置き換えている。こうして，$\phi$ 効果は $v_s$ 因子として取り出せた。

**問 3** 関係式

$$\langle 0|e^{i\frac{1}{c}\chi(x)}|0\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2c^2}D(0)\right) \tag{5.65}$$

を導け。ただし，$\omega_k$ を $\chi$ のエネルギーとすると

$$D(0) = \langle 0|[\chi(x)]^2|0\rangle \tag{5.66}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\frac{1}{2\omega_k} \tag{5.67}$$

である。

ヒント：$\exp[i(1/c)\chi]$ を $\chi$ のべきで展開し，各項の真空期待値を計算せよ。

有限温度 $T$ の状況では，$D(0)$ に対する上記の公式は

$$D(0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\frac{1}{2\omega_k}\frac{1}{1-e^{-\beta\omega_k}} \tag{5.68}$$

にかわる。ただし，$\beta = 1/T$ である（Boltzmann 定数が $k_B = 1$ となる単位系を採用している）。$\omega_k$ は運動量零で消えるので，$k = |\vec{k}|$ が小さいところで，ソフト $\chi$ 粒子の $D(0)$ への寄与は

$$\frac{1}{2a^2\beta(2\pi)^3}\int d^3k\frac{1}{k^{2m}} \tag{5.69}$$

となる。この影響は3次元の系では非常に小さい。しかし2次元系に対しては，$d^3k$ が $kdk$ に比例した $d^2k$ に置き換わる。そのため，$m$ が1に等しいか大きい場合には小さい $k$ の寄与が効いて，$D(0)$ が赤外発散を含む。たとえば $m=1$ のとき，$D(0)$ は $k=0$ で赤外発散 $\ln k$ を含む。

赤外効果のこの発散のために，2次元系では秩序パラメータ $v$ が現われない。1次元系では $k=0$ での赤外発散が強まり，$k^{-1}$ となる。この赤外効果のため，1次元や2次元系ではこの節で調べているような位相秩序はない。この状況は系の領域が有限の場合もそれほど変わらない。次の章で議論するが，有限領域の系には境界近辺の領域があり，それ自身に無限個の自由度が存在するからである。

1次元や2次元系に秩序状態を実現することが難しいことは，種々の方法で多くの物理学者によって示されている [12, 13, 14]。ここでは，[15, 16, 8] の議論を紹介した。

ただし，これらの考察は，低次元系における短距離秩序の存在や離散的対称性に関連した秩序までを否定するものではない。

### 5.2.8 計算上の処方

$\phi$ の質量や $c$ を求めるには，モデルごとの具体的な計算が必要である。まず粗っぽい近似から始めることにして，上述のダイナミカルマップに出てくる点々の部分を無視しよう。この場合，

$$\psi^\dagger\psi = (v + Z_1\phi)^2 + Z_2^2\chi^2 \tag{5.70}$$

$$\partial^\mu\psi^\dagger\partial_\mu\psi = \partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + \partial^\mu\chi\partial_\mu\chi \tag{5.71}$$

となり，これより

$$(\psi^\dagger\psi)^2 = v^4 + 4v^3Z_1\phi + 6v^2Z_1^2\phi^2 + 2v^2Z_2^2\chi^2 \tag{5.72}$$

を得る。最後の表式では，2次より高次の項を無視した。それらは，上で無視した点々の項と同じ次数の寄与をする項である。結局，(5.44) で与えられるハミルトニアン密度のダイナミカルマップに現われる線形 $\phi$ 項は

$$-2vZ_1(\mu^2 + 2v^2\lambda)\phi \tag{5.73}$$

の形になる。(4.26) によるとハミルトニアンのダイナミカルマップは自由ハミルトニアンであるべきなので，この項は消えるはずである。したがって，$v \neq 0$

を考慮すると，秩序パラメータ $v$ は

$$\mu^2 + 2v^2\lambda = 0 \tag{5.74}$$

より決まり，$v^2 = -(\mu^2/2\lambda)$ を得る。これより，$\lambda$ が引力的であるべきこともわかる。一方，$\chi^2$ 項は $-Z_2^2(\mu^2 + 2v^2\lambda)\chi^2$ となるが，これは (5.74) により消える。つまり，当然そうあるべきだが，$\chi$ は質量なしである。$\phi^2$ 項は

$$-Z_1^2(\mu^2 + 6v^2\lambda)\phi^2 \tag{5.75}$$

となる。(5.74) より，この項は $2\mu^2 Z_1^2$ に等しく，正である。これらの一貫した結果を導出するのに，ハミルトニアン (5.44) の質量項 $\mu^2\psi^\dagger\psi$ の負符号が重要であったことを指摘しておく。結局，ハミルトニアンのダイナミカルマップは，質量なしの $\chi$ 場と質量 $2\mu^2 Z_1^2$ の $\phi$ 場の自由ハミルトニアンの和で与えられることがわかった：

$$\begin{aligned} H = &\int d^3x [Z_1^2\dot{\phi}^2 + Z_1^2(\nabla\phi)^2 + 2\mu^2 Z_1^2\phi^2] \\ &+ \int d^3x\, Z_2^2[\dot{\chi}^2 + (\nabla\chi)^2]. \end{aligned} \tag{5.76}$$

この手続きにより，ハミルトニアンのダイナミカルマップと秩序パラメータ $v$ が決定する。同様にして，流れ $N_\mu$ のダイナミカルマップが，同じ近似の範囲で (5.48) より求められる。結果は，

$$N_\mu(x) = 2Z_2 v\partial_\mu\chi(x) \tag{5.77}$$

である。これを (5.63) と比較して $c = 2Z_2 v$ を得る。こうして，流れ $N_\mu$ に現われる $\phi$ の質量，秩序パラメータ $v$，それと係数 $c$ を，もっとも粗い近似で得たのである。Feynman 図におけるループの効果を取り入れれば，近似を上げることができる。

上で見たように，もっとも粗い近似で質量をもつ準粒子 $\phi$ を発見した。しかし，高次項の補正によりこの準粒子は不安定になり，$\chi$ 粒子へと崩壊する。したがって，厳密には $\phi$ 準粒子は存在しない。

### 5.2.9　超流動の流れ

流れのダイナミカルマップより，超流動における流れは $\chi$ 場の流れであることがわかる。この場のエネルギーには飛びがないので，この流動にはエネル

ギーを必要とせず，したがって超流動現象が実現する。次章では，$\chi$ 粒子が凝縮するとどのようにして超流動渦流が現われるのかを調べる。

## 5.3 超伝導

### 5.3.1 はじめに

超伝導も位相対称性が自発的に破れた状態である。そのためその動的な機構には前節で取り上げた超流動と多くの共通点がある。そこで，この小節は簡単に済ませる。ただし，超伝導と超流動で違っている点が一つある。それは，超伝導が電子などの荷電粒子の秩序状態であり，したがって電磁場が関与するということである。つまり，超伝導は，ゲージ理論における位相対称性の自発的破れの実例となっている。電磁場は荷電粒子間の Coulomb 相互作用を含み，Coulomb 相互作用は無限遠におよぶので，位相秩序を維持するのに南部-Goldstone ボソンはいらないであろう。実際，ゲージ不変性のため位相は電磁場の縦成分となる。前節で見たように南部-Goldstone ボソンは位相場として現われるので，いかなる**ゲージ不変な演算子**のダイナミカルマップにおいても，それは電磁場の縦成分となるはずである。これは，Anderson-Higgs-Kibble メカニズムと呼ばれている [18, 19, 20]。しかし，これは南部-Goldstone ボソンが完全に消えるということではない。実際，一般論によると，$\chi$ 場の変位は破れた対称性にかかわる不変変換の担い手であるので，ゲージ理論においても南部-Goldstone 場 $\chi$ が存在するはずである。$\chi$ はゲージ不変でない演算子のダイナミカルマップに現われ [15, 8]，Feynman 図の内線における短時間ゆらぎを通じて多くの観測量に影響を与える。超伝導は，自発的に破れた対称性におけるこのゲージ効果の簡単なモデルを提供する。

### 5.3.2 BCS モデル

電磁相互作用をしている電子場 $\psi_{\uparrow,\downarrow}$ の系を考えよう。添え字はスピン状態を表わしている。電磁場に対して Coulomb ゲージを採用する。したがって，ベクトル・ポテンシャルは横成分のみである：$\vec{\nabla}\vec{a} = 0$. ここで，$\vec{a}$ は電磁ベクトル・ポテンシャルである。話を明確にするために BCS モデル [21] を採用するが，解析の一般的処方は超伝導のほとんどのモデルに応用可能である。

ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_N = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \sum_{i=1,2}[i\psi_i^\dagger\frac{\partial}{\partial t}\psi_i$$
$$-\frac{1}{2m}(\vec{\nabla} - ie\vec{a}\,)\psi_i^\dagger(\vec{\nabla} + ie\vec{a}\,)\psi_i + \mu_F\psi_i^\dagger\psi_i]$$
$$-\lambda\psi_\uparrow^\dagger\psi_\downarrow^\dagger\psi_\downarrow\psi_\uparrow$$
$$+\mathcal{L}_c \tag{5.78}$$

で与えられる。$\mathcal{L}_c$ は Coulomb 相互作用ラグランジアンであるが，これより Coulomb 相互作用ハミルトニアンは

$$H_c = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi}\int d^3x\int d^3y\frac{\rho(\vec{x},t)\rho(\vec{y},t)}{|\vec{x}-\vec{y}\,|} \tag{5.79}$$

となる。ただし $\rho$ は電荷密度である。$\psi_1 = \psi_\uparrow$，$\psi_2 = \psi_\downarrow$ なる記法を用いた。$\mu_F$ は電子の化学ポテンシャルである。なお，電磁相互作用は二つの顔をもつ；$\vec{a}$ は $(\vec{\nabla}+ie\vec{a})\psi_i$ とその Hermite 共役を通じて現われ，Coulomb 相互作用は電荷間に働く。

このラグランジアンより $\psi_i$ の正準共役は $i\psi_i^\dagger$ であることがわかる。電子が Fermi 粒子であることを考慮に入れると

$$[\psi_i(x),\psi_j^\dagger(y)]_+\delta(t_x - t_y) = \delta(x-y) \tag{5.80}$$

を得る。記法 $[A,B]_+ = AB + BA$ を導入した。

ラグランジアンは，位相変化 $\psi_i \to \exp{[i\theta]}\psi_i$ の下に不変である。これは，無限小の $\theta$ に対して

$$\delta\psi_i = i\psi_i, \quad \delta\psi_i^\dagger = -i\psi_i^\dagger \tag{5.81}$$

である。ラグランジアンはゲージ変換：

$$\vec{a}(x) \to \vec{a}(x) + \vec{\nabla}\lambda(x), \quad \psi_i(x) \to e^{ie\lambda(x)}\psi_i(x) \tag{5.82}$$

に関しても不変である。なお，**ゲージ関数にはその Fourier 変換の存在することが要請される。**

### 5.3.3 流れと生成子

電流 $\vec{j}$ と電荷密度 $\rho$ は，Maxwell 方程式を通じて定義される。これらは，電子の位相変換にかかわる Nöther 流 $N_\mu$ として次のように与えられる：

$$\vec{j} = -e\vec{N}, \quad \rho = -eN_0. \tag{5.83}$$

(5.24) と (5.81) によると，流れ，電荷密度，生成子は

$$\vec{j} = \sum_{i=1,2} [-\frac{ie}{2m}\psi_i^\dagger \overleftrightarrow{\nabla} \psi_i + \frac{e}{m}\vec{a}\psi_i^\dagger\psi_i] \tag{5.84}$$

$$\rho = \sum_{i=1,2} \psi_i^\dagger\psi_i \tag{5.85}$$

$$N = \frac{1}{e}\int d^3x\rho(x) \tag{5.86}$$

で与えられる。ただし，記法 $\overleftrightarrow{\nabla}=\overrightarrow{\nabla} - \overleftarrow{\nabla}$ を用いた。

### 5.3.4 位相対称性の再構成

南部-Goldstone 定理によると，エネルギーに飛びのない場 $\chi$ が存在するはずである。ボソン変換

$$\chi \to \chi + c\theta \tag{5.87}$$

は (5.46) の位相変換を誘起するので，$\psi_{\uparrow,\downarrow}$ のダイナミカルマップは

$$\psi_{\uparrow,\downarrow} = e^{i\frac{1}{\eta(\nabla^2)}\chi}F_{\uparrow,\downarrow}[\varphi, \vec{a} - \frac{1}{e}\eta^{-1}(\nabla^2)\vec{\nabla}\chi] \tag{5.88}$$

の形になる [6, 8]。ただし，$\varphi$ は準電子であり，$\eta(\nabla^2)$ は $\eta(0) = (1/c)$ を満たす微分演算子である（$c$ は c 数）。位相因子に現われるので $\chi$ は位相場と呼ばれる。$\eta^{-1}(\nabla^2)\chi$ が電子の位相なので，ゲージ変換は $\vec{a} \to \vec{a}+\vec{\nabla}\lambda$ と $\chi \to \chi+e\eta(\nabla^2)\lambda$（$\lambda(x)$ は Fourier 変換可能な c 数）で与えられる。したがって，いかなるゲージ不変演算子のダイナミカルマップにも，$\vec{a}$ と $\vec{\nabla}\chi$ は必ず $[\vec{a} - \frac{1}{e}\eta^{-1}(\nabla^2)\chi]$ という組合せで現われるべきことを，ゲージ不変性は要求するのである。このことは，$\psi_{\uparrow,\downarrow}$ のダイナミカルマップに対する上の表式に考慮されている。位相変換は $\chi$ の変位によって完全に処理されているので，準電子場 $\varphi$ は位相変換の下では変化しない。これは凍結現象の一例である。

### 5.3.5 電荷密度のダイナミカルマップ

$N$ は $\chi$ のボソン変換 (5.87) を生成するので，そのダイナミカルマップは

$$N = \int d^3x\eta(\nabla^2)\pi(x) \tag{5.89}$$

の形である。ただし，$\pi$ は $\chi$ の正準共役である：

$$[\chi(x), \pi(y)]\delta(t_x - t_y) = i\delta(x - y). \tag{5.90}$$

$N$ は $N_0$ の空間積分なので，電荷密度のダイナミカルマップは

$$\rho(x) = -e\eta(\nabla^2)\pi(x) + \cdots \tag{5.91}$$

である。点々は高次の $N$ 積を表わす。

### 5.3.6 南部-Goldstone 場

$\pi$ が $\dot{\chi}$ でないので，$\chi$ の自由場方程式は超流動の場合ほど簡単ではない。Coulomb 相互作用が $\pi$ を含むため複雑になるのである。

Coulomb 相互作用を無視すると，$\chi$ のハミルトニアンは

$$H^0_\chi = \frac{1}{2}\int d^3x \left(\pi^2 + [v_B(\nabla^2)\vec{\nabla}\chi]^2\right) \tag{5.92}$$

の形である。ただし，$v_B(\nabla^2)$ は，ボソン･エネルギー $\omega_k$ により $\omega_k^2 = v_B(-k^2)k^2$ で定義される。これに Coulomb 相互作用を加え (5.91) を考慮すると，ハミルトニアン

$$H_\chi = \frac{1}{2}\int d^3x \left(\pi^2 + [v_B(\nabla^2)\vec{\nabla}\chi]^2\right) + \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi}\int d^3x \int d^3y \eta(\nabla^2)\pi(\vec{x},t)\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\eta(\nabla^2)\pi(\vec{y},t) \tag{5.93}$$

を得る。

このハミルトニアンと $\chi$ や $\pi$ との交換関係より，次の場の方程式を得る：

$$\dot{\chi}(x) = \pi(x) + \frac{e^2}{4\pi}\eta(\nabla^2)\int d^3y \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\eta(\nabla^2)\pi(\vec{y},t) \tag{5.94}$$

$$\dot{\pi}(x) = v_B^2(\nabla^2)\nabla^2\chi(x). \tag{5.95}$$

これに，流れの保存則

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \tag{5.96}$$

（これは，Nöther 流の保存則から導ける）と荷電密度の構造 (5.91) を用いると，流れのダイナミカルマップに次のような線形の $\chi$ 項が現われる：

$$\vec{j}_\chi = -e\eta(\nabla^2)v_B^2(\nabla^2)\vec{\nabla}\chi. \tag{5.97}$$

(5.88) によると，$\vec{a}$ と $\chi$ は，いかなるゲージ不変演算子のダイナミカルマップにも $[e\vec{a} - \eta^{-1}(\nabla^2)\vec{\nabla}\chi]$ の組合せで現われる。流れはゲージ不変なので，流れ

のダイナミカルマップとして

$$\vec{j} = e^2\eta^2(\nabla^2)v_B^2(\nabla^2)[\vec{a} - \frac{1}{e}\eta^{-1}(\nabla^2)\vec{\nabla}\chi] + \cdots \tag{5.98}$$

が得られる。Meissner 流が現われるのは，$\eta(0)v_B(0)$ が消えないためである。このことは次節で議論する。

流れにこの線形 $\vec{a}$ 項があるということは，$\vec{j} = -(\partial H/e\partial\vec{a})$ であるので，準光子の自由ハミルトニアンに

$$\frac{1}{2}e^2\vec{a}\cdot\eta^2(\nabla^2)v_B^2(\nabla^2)\vec{a} \tag{5.99}$$

の項があることを意味する。これより，超伝導系の光子はエネルギー $\omega_{pl}(k) = e\eta(-k^2)v_B(-k^2)$ をもち，運動量が零でもエネルギーが零とならないことがわかる。これは，超伝導状態における横成分プラズマである。

**以上は，相対論的な場合には，対称性が自発的に破れるとゲージ場が質量をもつことを意味する**。これは，Anderson-Higgs-Kibble メカニズムの一側面である [18, 19, 20]。もう一つの側面は次の小節で議論する。

### 5.3.7 NG ボソンは完全に消去できるか？

二つの式 (5.94) と (5.95) より

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_B^2(\nabla^2)\nabla^2\right)\chi = \frac{e^2}{4\pi}\eta(\nabla^2)\int d^3y\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\eta(\nabla^2)v_B^2(\nabla^2)\nabla^2\chi(\vec{y},t) \tag{5.100}$$

を得る。

これは NG ボソン場の方程式である。$1/|\vec{x}-\vec{y}|$ **が無限遠まで効くので，最後の項には部分積分は使えないことに**注意する必要がある。この積分を注意深く行う方法の一つは，Fourier 展開の形式にもち込み，Coulomb ポテンシャルを含む積分に運動量積分の下限切断 $k_c$ を導入するというものである。この切断のおかげで部分積分が実行でき，$|\vec{k}| > k_c$ なる運動量の $\chi$ に対して

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_B^2(\nabla^2)\nabla^2 + e^2\eta^2(\nabla^2)v_B^2(\nabla^2)\right]\chi = 0 \tag{5.101}$$

を得る。低運動量の $\chi$（$|\vec{k}| < k_c$）には Coulomb 項がないので，

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_B^2(\nabla^2)\nabla^2\right]\chi = 0 \tag{5.102}$$

となる。**計算の最後の段階で極限 $k_c \to 0$ をとる必要がある**（おおまかにいって，$k_c$ は系の差し渡しの逆数程度の大きさである）。この極限で $\chi$ は時間によらなくなり，(5.102) は，Laplace 方程式

$$\nabla^2\chi = 0 \tag{5.103}$$

に置き換わる。これは，$\chi$ の零運動量を抽出する。

したがって，$k_c$ が零の極限で，二つの方程式；(5.101) と (5.103) が得られる。(5.101) の解のエネルギーは，低運動量で $\omega_{pl} = e\eta(0)v_B(0)$ となる。これはプラズマ・エネルギーである。(5.101) を満たす $\chi$ 部分は，プラズモンの縦成分を与える。

上で述べたように，Laplace 方程式 (5.103) の解で Fourier 変換可能な部分は，零運動量の寄与だけを抽出する。「Coulomb 相互作用のため，**零運動量を除く**すべての運動量に関して，南部-Goldstone モードがプラズマ・モードに引き上げられる」といってよいだろう [15, 8]。したがって，観測できるボソンの励起準位はプラズマ準位である；飛びのない励起準位（位相子（phason）準位）は，Coulomb 効果のため観測量から外されてしまう。これは，Anderson - Higgs - Kibble メカニズムと呼ばれる [18, 19, 20]。

しかし，**位相不変性のためその存在が要求される**ので，Laplace 方程式 (5.103) を満たす位相場を無視することはできない [15, 8]。電子場の位相変換は $\chi$ の変位により生成されるが，それには NG 場の零運動量と零エネルギー部分が必要である。このボソンは励起準位としては観測されないが，位相変換の「監視役」である。

さらに次章では，超伝導混合状態で現われる**渦糸の起源が，この Laplace 方程式の解にある**ことを見る。

このソフト $\chi$ 粒子によるゆらぎの効果はしばしば重要になる。次の小節で秩序状態を調べることにより，それを示す。

### 5.3.8 秩序状態と $\theta$ 選定

$\theta$ 選定項 $\epsilon\Phi$ の $\Phi$ として次のものを採用しよう：

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}[\psi_\uparrow(x)\psi_\downarrow(x) + \psi_\downarrow^\dagger(x)\psi_\uparrow^\dagger(x)]. \tag{5.104}$$

これより

$$\chi_H \equiv \delta\Phi \tag{5.105}$$

$$= i\frac{1}{2}[\psi_\uparrow(x)\psi_\downarrow(x) - \psi_\downarrow^\dagger(x)\psi_\uparrow^\dagger(x)] \tag{5.106}$$

と

$$\delta\delta\Phi = -\Phi \tag{5.107}$$

を得る。つまり，$\Phi$ は $\psi_\uparrow(x)\psi_\downarrow(x)$ の実数部であり，$-\chi_H$ が虚数部である。(5.39) より，秩序パラメータは

$$v = \frac{1}{2}\langle 0|\Phi|0\rangle \tag{5.108}$$

で与えられる。結局，次のダイナミカルマップを得る：

$$\chi_H = Z(\nabla^2)\chi + \cdots. \tag{5.109}$$

なお，モデルが相対論的ではないので，$Z$ は空間微分の関数でもよい。位相は $v$ が実数であるように選ぶ。

NG ボソンのエネルギー·スペクトルと，微分演算子 $Z(\nabla^2)$ は，関数 $\langle 0|T[\chi_H(x)\chi_H(y)]|0\rangle$ を計算すると得られる。

### 5.3.9 ゆらぎの効果

小節 5.2.7 の計算にしたがって，秩序パラメータとして

$$v = v_s \exp\left(-\frac{1}{c^2}D(0)\right) \tag{5.110}$$

を得る。ただし，

$$D(0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\theta(k_c - |\vec{k}|)\frac{1}{2\omega_k}\frac{1}{1-e^{-\beta\omega_k}} \tag{5.111}$$

である（$\beta = 1/T$）。ただし，赤外効果に影響を与えないので，プラズマ効果は無視した。つまり，運動量積分は領域 $|\vec{k}| \leq k_c$ に制限される。$k_c$ より小さい運動量での $\chi$ のエネルギーは $\omega_k = v_B(k^2)k$ である。したがって，積分領域が $k_c$ 以下に制限されている以外は，小節 5.2.7 で議論した超流動の場合と同じである。結局，3 次元ではその効果が無視できる。小節 5.2.7 での 2，3 次元で秩序パラメータが不安定になるという議論は，$k_c$ が有限（たとえどんなに小さくても）であれば，超伝導位相秩序にも適用できる。この不安定性は $k_c$ が零の極限でも成り立つのである。つまり，ここで考察したような位相秩序状態は，2，3 次元系では不安定であるといえる [15, 16, 8]。

2，3 次元の構造を形成するある種の分子配置をとる物質がある。よく知られたものとして，高温臨界温度を有する酸化銅超伝導体がある。この種の物質

は多くの2次元面を有するので面間や線間のトンネル効果が起こり，そのためここで考察した不安定性を起こさずにいられるのであろう。これは一つの可能性にすぎず，他の機構によってもこの不安定性を避けることができるであろう。また，もしもこのトンネルの機構がうまくいっているとしても，これらの物質ではゆらぎの効果が強く現われるであろう。

この節で見たように，位相対称性の自発的破れの一般機構は簡単であるが，現実にはサンプルの構造に依存して変化に富んだ様相を呈する。

### 5.3.10 ゲージ不変性

ゲージ不変な理論では，いかなるゲージ不変演算子のダイナミカルマップも $\chi$ を $[e\vec{a} - \eta^{-1}(\nabla^2)\vec{\nabla}\chi]$ の組合せで含まねばならないことが要請されることを知った。これにはやや注意がいる。Coulomb ゲージを用いるためベクトル・ポテンシャル $\vec{a}$ を横成分のみにとり，$\vec{\nabla}\lambda(x)$（$\lambda$ は Fourier 変換可能とする）は縦成分としたので，もはや $\vec{a}$ にゲージ変換の自由度は残されていない。

$\vec{a}$ の正準共役は自身の時間微分で与えられるので，$\vec{a}$ のゲージ変換の生成子は

$$N_a = \int d^3x \frac{\partial}{\partial t}\vec{a}(x) \cdot \vec{\nabla}\lambda(x) \tag{5.112}$$

となり，$\vec{\nabla}\vec{a} = 0$ なので予想通りこれは零となる。

しかし，ベクトル・ポテンシャルを横成分と決めなくても Coulomb ゲージを使うことができる。Coulomb ゲージではベクトル・ポテンシャル $\vec{A}$ は，$\lambda(x)$ を c 数関数として，一般に

$$\vec{A}(x) = \vec{a}(x) + \vec{\nabla}\lambda(x) \tag{5.113}$$

の形で与えられる。ただし，$\vec{a}$ は横成分ベクトル・ポテンシャル演算子である。

ここで，1.4 節で出てきた c - q 転化規則を思い出そう。この規則によると，いかなる c 数の変化も q 数の変化によって生成されるべきである。したがって，c 数 $\lambda(x)$ のいかなる変化も q 数の変化によって誘起されるべきである。

一方，ゲージ変換は電子の位相（$\eta^{-1}(\nabla^2)\chi$）を $e\lambda(x)$ だけ変化させるので，この変換によって $\chi(x) \to \chi(x) + e\eta(\nabla^2)\lambda(x)$ が誘起されねばならない。つまり，ゲージ不変性は，この $\chi$ の変化がベクトル・ポテンシャル $\vec{A}(x)$ 中の c 数 $\lambda(x)$ の変化に相当することを要求するのである。これより，上述のゲージ規則が導かれる。

### 5.3.11 計算上の処方

超伝導物質の解析には電磁気量の計算が必要である。磁気的性質は，(5.98) で得られた Meissner 流の構造によってそのほとんどが制御される。

流れの表式 (5.98) は，条件

$$c(0) = 1 \tag{5.114}$$

の下に，通常

$$\vec{j} = -\frac{1}{4\pi\lambda_L^2}c(\nabla^2)[\vec{a} - \frac{1}{e}\eta^{-1}(\nabla^2)\vec{\nabla}\chi] + \cdots \tag{5.115}$$

と書かれる。この条件より $\lambda_L$ が

$$\frac{1}{\lambda_L^2} = 4\pi e^2 v_B(0)\eta^2(0) \tag{5.116}$$

と決まる。定数 $\lambda_L$ は **London 侵入距離**と呼ばれる。(5.115) 中の $c(\nabla^2)$ は，Meissner 流の構造因子である。この関数の到達範囲は**コヒーレンス長**と呼ばれ，通常 $\xi$ と記す。比 $\kappa = 0.96\lambda_L/\xi$ は Ginzburg - Landau パラメータと呼ばれる。簡単のため，$\kappa$ の近似量 $\kappa_B = \lambda_L/\xi$ を用いることが多い。多くの重要な性質は，これらの定数と準粒子のエネルギー・スペクトルで決まる。

超伝導状態は，上向きと下向きスピンをもつ電子対（Cooper 対と呼ばれる）の凝縮を誘起するフェルミオンの Bogoliubov 変換を通じて常伝導状態と関連している。したがって，超伝導体の Fock 空間は常伝導体の Fock 空間と非同値である。準電子のエネルギーの計算は，Cooper 対の凝縮を生成するこの Bogoliubov 変換を利用して求められる。

$\lambda_L$ や $\xi$，$c(\nabla^2)$ は NG ボソンの動的振舞いによって制御されるので，これらを求めるには，2 点関数 $\langle 0|T[\chi_H(x)\chi_H(y)]|0\rangle$ の計算が必要である。BCS モデルでのこれらの量は，ランダムフェイズ近似の範囲で計算されている [18, 15, 8]。

永久電流は，Laplace 方程式に従う $\chi$ の凝縮によって生成される流れである。この場はエネルギーをいっさい運ばないので，その流れは抵抗を受けず超伝導流が実現する。$\chi_H$ 場の 2 点伝播関数は NG ボソン $\chi$ の零エネルギー特異点を有するので，伝導度が無限大になる（たとえば，[8] の 352 頁参照）。

個々の物質の解析にはそれぞれの特徴に応じて特定の方法が必要であるが，この節で行ったような一般的な考察は，現実に即した解析においてもしばしば有用な指針を提供する。

## 5.4 非 Abel 的対称性の破れ

### 5.4.1 スピン対称性の自発的破れ

前の二節では，Abel 対称性に属する位相対称性の自発的破れを調べた。この節では，非 Abel 対称性に属するスピンの回転対称性の自発的破れによって作られる，巨視的スピン状態を考察しよう。

三つの演算子 $S_i$（$i=1,2,3$）が SU(2) の代数：

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k \tag{5.117}$$

を構成しているとしよう。ただし，$\epsilon_{ijk}$ は完全反対称テンソルで，$\epsilon_{123}=1$ を満たす。この場合，生成子は $S_i - \langle 0|S_i|0\rangle$ で与えられる。第 3 軸の回りの回転に対して真空が不変であると仮定する。$S_1$ と $S_2$ は第 3 軸に垂直な平面内の 2 次元のベクトルであるので，$\langle 0|S_i|0\rangle = 0$（$i=1,2$）を満たす。

局所的スピン演算子を $s_i(x)$ と記す：

$$S_i = \int d^3x\, s_i(x), \quad i=1,2,3. \tag{5.118}$$

演算子 $s_i$ は，スピン回転の下で 3 成分ベクトルとして振る舞う。

$\theta$ 選定項 $\epsilon\Phi$ の $\Phi$ として $s_3$ をとろう。$s_3$ は 3 成分ベクトルの 3 番目の成分なので，

$$\delta_1\delta_1 s_3 = \delta_2\delta_2 s_3 = -s_3 \tag{5.119}$$

を得る。ただし，$\delta_i$ は $S_i$ によって誘起された変化とする。したがって，(5.39) より，秩序パラメータは

$$v = \langle 0|s_3|0\rangle \tag{5.120}$$

である。これは，第 3 軸方向を向いた巨視的なスピン運動量密度である。

第 3 軸回りの回転を誘起する生成子は $S_3 - \langle 0|S_3|0\rangle$ である。真空 $|0\rangle$ はこの対称性を破っていないので

$$[S_3 - vV]|0\rangle = 0 \tag{5.121}$$

を得る。ここで，$\langle 0|S_3|0\rangle = vV$ であるので $vV$ が全スピンを意味し，したがって $V$ は系の体積である。$S_3$ の真空期待値が零でないので，$S_3$ は真空 $|0\rangle$ を消去しない。つまり，4.5 節で見たように，有限のノルムをもつのは状態 $S_3|0\rangle$ ではなく状態 $[S_3 - vV]|0\rangle$ の方である。したがって，上の式に $V$ が現われたことも驚かない。

第3軸以外の不変性は破れている：

$$S_i|0\rangle \neq 0, \quad i = 1, 2. \tag{5.122}$$

この場合，部分群 U(1) の対称性を保ったまま，SU(2) 対称性が自発的に破れるのである。対称性を保ったままの部分群は，安定群と呼ばれる。これは，U(1) 安定群をともなった SU(2) 対称性の自発的破れの実例となっている。

この真空では $S_i$（$i = 1, 2$）対称性が破れているので，これらの演算子は NG ボソン $\chi$ の変位を生成する。この変位を解析するのに

$$S_\pm \equiv S_1 \pm iS_2 \tag{5.123}$$

を導入すると便利である。これらの演算子は，小節 5.1.3 で行った対称性の再構成に関する一般的な考察に従って $\chi$ 場の変位を誘起する。$S_-$ によって誘起される変位を

$$\chi(x) \to \chi(x) + c\theta \tag{5.124}$$

と書こう。ただし，$\theta$ は変換パラメータである。複素 c 数 $c$ の位相は，(1-2) 平面内の (1-2) 軸の方向によって決まる量である。したがって，$c$ を実数にとっても一般性を失わない。

強磁性では $\chi$ はふつう

$$\chi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \chi_k e^{i[\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_k t]} \tag{5.125}$$

の形をしている。これより

$$[\chi(x), \chi^\dagger(y)]\delta(t_x - t_y) = \delta(x - y) \tag{5.126}$$

が得られるので，$i\chi^\dagger$ は $\chi$ の正準共役である。上記の $\chi$ 変位が $S_-$ により生成されることより，$S_-$ のダイナミカルマップは

$$S_- = c \int d^3x \chi^\dagger(x) \tag{5.127}$$

となることがわかる。この Hermite 共役をとると，$S_+$ のダイナミカルマップを得る。NG 場 $\chi$ はマグノン（magnon）あるいはスピン波と呼ばれる。

関係 (5.117) より

$$[S_3, S_\pm] = \pm S_\pm \tag{5.128}$$

が得られる。これは $S_3$ が $S_\pm$ の位相だけを変化させることを示し，ダイナミカルマップが

$$S_3 = vV + \int d^3k \chi_k^\dagger \chi_k \tag{5.129}$$

であることを意味する。

なお，上記のダイナミカルマップは

$$[S_+, S_-] \overset{w}{=} c^2 V \tag{5.130}$$

を与える。これは，弱い関係，つまり (5.130) は真空 $|0\rangle$ 上に作られた Fock 空間の状態ベクトル間で行列要素をとったときにだけ成り立つのである。

一方，(5.117) の両辺の真空期待値をとると，$V$ を陽に含む関係：

$$\langle 0|[S_+, S_-]|0\rangle = 2vV \tag{5.131}$$

を得る。これより，定数 $c$ はスピン密度 $v$ を用いて

$$c^2 = 2v \tag{5.132}$$

と決まる。

弱い関係 (5.130) と (5.117) 中の関係式とが違うのは，次の理由による [22]。$S_i$ の真空期待値は，$\langle a|s_i(x)|b\rangle$ の空間積分で与えられる（$|a\rangle$ と $|b\rangle$ は，$|0\rangle$ 上に作られた Fock 空間に属する任意の状態ベクトル）。ここで重要なのは，空間積分の前に行列要素が求まることである。この行列要素が次数 $O(1/V)$（$V$ は体積）の項を有するとき，$V$ 無限の極限でその項は零とみなすことである。積分をしてもこの項はもはやないので，弱い関係 (5.130) が得られる。これらの項は，極限操作の前に積分を行えば残り，関係 (5.117) を与える。

SU(2) 対称性の自発的破れは，相対論的な場合の方が簡単である。3 成分荷電ベクトル $\psi_i$（$i = 1, 2, 3$）に対するラグランジアンを考える。各成分は Hermite の Heisenberg 演算子である。ラグランジアンが荷電スピン回転に関して不変，つまり SU(2) 対称性をもつと仮定する。

真空が，第 3 軸回りの回転対称性は保ったままこの回転対称性を破っていると仮定する：

$$S_i|0\rangle \neq 0, \quad i = 1, 2 \tag{5.133}$$

$$S_3|0\rangle = 0. \tag{5.134}$$

破れた対称性に関連して二つの生成子があるので，**変位**

$$\chi_i \to \chi_i + c\theta \tag{5.135}$$

**が変換** $\exp[-i\theta S_i]$ **を誘起する**ような二つのNG場 $\chi_i$; $i = 1, 2$ が存在する。$S_3$ 対称性は破れていないので，c数定数 $c$ は $i$ によらない。

(5.135) の二つの変位は互いに可換なので

$$[S_1, S_2] \overset{w}{=} 0 \tag{5.136}$$

である。これもまた弱い関係である。この関係と (5.117) 中の関係との違いは，上で議論した強磁性のモデルでの違いと同じである。

第3軸の回りの回転対称性は破れていないので，演算子 $S_i$ は2次元ベクトルの二つの成分のように振る舞う：

$$[S_3, S_i] = i\epsilon_{3ij}S_j, \quad i = 1, 2. \tag{5.137}$$

まとめると，観測される対称性は，二つの $\chi$ 変位と一つの回転（2次元Euclid空間の代数E(2)を形成している）で構成されている [22]。

相対論的モデルでは，$\chi_i$ の正準共役はその時間微分 $\dot{\chi}_i$ である：

$$[\chi_i(x), \dot{\chi}_j(y)]\delta(t_x - t_y) = i\delta_{ij}\delta(x - y). \tag{5.138}$$

したがって，ダイナミカルマップは

$$S_i = \frac{1}{c}\int d^3x\dot{\chi}_i(x), \quad i = 1, 2 \tag{5.139}$$

$$s_i(x) = \frac{1}{c}\dot{\chi}_i(x) + \cdots, \quad i = 1, 2 \tag{5.140}$$

$$S_3 = \int d^3x[\dot{\chi}_1\chi_2 - \dot{\chi}_2\chi_1] \tag{5.141}$$

である。$S_3$ のダイナミカルマップでは $\chi$ 場の寄与のみを書いた。上で述べたE(2)群の既約表現をなす他の準粒子があり得る。そのNG場 $\chi_i$ には質量がない。

### 5.4.2 対称性の再構成

5.2節と5.3節で，Abel的位相対称性が再構成され，同じくAbel的NGボソン変位となることをみた。さらに前節では，対称性の再構成によって群の性質まで変わり得るという驚くべき事実を示した。

相対論的荷電スピンモデルは，SU(2) の基本対称性が観測される E(2) 対称性に再構成される例である。これによって，対称性の再構成における二つの特徴がわかる。一つは，生成子の数は再構成の前後で変わらないことである。これは自明のことであるが，しばしば見落とされる。たとえば，強磁性の場合，観測が容易なのは第 3 軸回りの回転対称性だけなので，あたかも対称性が縮小したのではないかという誤解を生じることがある。前節で見たように対称性は縮小せず，基本対称性も観測される対称性も同じ数の変換をもっている。対称性の再構成にかかわるもう一つの特徴は，対称性が破れると必ず NG ボソン場の変位が誘起されることである。場の変位はそもそも Abel 的なので，この第二の点のために群の構造変化がしばしば起こるのである。

群の構造変化が起こるのは，生成子密度の行列要素にある $(1/V)$ 項の消滅のためである。空間積分の前に極限 $V \to \infty$ をとらねばならず [22]，また体積無限大の極限で群の変化が起こるので，これは群変形（group deformation）の一種である。

群の縮約 [23] を知っている読者は，SU(2) → E(2) の変化が群の縮約であることに気づいたであろう。

安定群（破れない部分対称群のうち最大のもの）をともなう対称群 SU(2) × SU(2) の実スカラー場モデルにおける対称性の再構成は，SU(2)×SU(2) → E(3) の形で与えられる。ただし，E(3) は 3 次元の Euclid 代数である。これもまた群の縮約である。この種の実例は，パイオン物理における SU(2)×SU(2) カイラル対称性である。この対称性が自発的に破れるとパイオンが 3 成分 NG ボソンとなり，上述の再構成が起こる：SU(2)×SU(2) → E(3)。このことは非常に重要である。もし観測される対称性が SU(2)×SU(2) であったとすると，3 成分パイオンと折り合いがつかないが，E(3) ならばつくのである。

対称性の再構成が群の縮約となるための完全な条件は，安定群が最大の部分群のときであることが示されている（[8] の 307 頁をみよ）。

すべての対称性の再構成が群の縮約であるというわけではないが，Weimar と Joos によって示されたように，それらを群の変形によって定式化することもできる [24, 25]。

### 5.4.3 低エネルギー定理 II

NG ボソンに関連した低エネルギー定理のもっとも簡単な形は，5.1.5 節で紹介した。その定理によるとソフト NG ボソンはいかなる反応にも関与しなかっ

た。この小節では，より厳密な形で低エネルギー定理を与える。それによって，「対称性が再構成されるときの構造を知ることが，ソフト NG ボソンが関与する反応のうち特定の反応を見つけだす際に，いかに手助けとなるか」がわかるであろう。

Heisenberg 場 $\psi$ の積の和である Heisenberg 演算子 $F[\psi]$ を考えよう。ある対称性が自発的に破れ，NG ボソン場 $\chi_i\,(i=1,2,\cdots)$ が現われたと仮定しよう。$F$ のダイナミカルマップは $F[\chi_1,\chi_2,\cdots]$ となる。ただし，NG ボソン以外の準粒子は明記しないことにする。

NG ボソン場 $\chi_i$ の変位：

$$\chi_i \to \chi_i + c_i\theta \tag{5.142}$$

（$\theta$ は変換パラメータ）によって生成される生成子 $N_i$ の作用を考察しよう。無限小 $N_i$ 変換による $F$ の変化を無限小パラメータ $\theta$ で割ったものを $\delta_i F$ と記す。$N_1$ 変換：

$$\delta_1 F[\psi] = \frac{1}{\theta}\left(F[\chi_1 + c_1\theta, \chi_2, \cdots] - F[\chi_1, \cdots]\right) \tag{5.143}$$

に注意を向けよう。

**問 4** 上記の関係から，公式

$$\langle a|\delta_1 F[\psi]|b\rangle = \lim_{k\to 0}(2\pi)^{3/2}[2\omega_k^1]^{1/2}c_1\langle a|F[\psi]|b,\chi_1(k)\rangle \tag{5.144}$$

$$= \lim_{k\to 0}(2\pi)^{3/2}[2\omega_k^1]^{1/2}c_1\langle a,\chi_1(k)|F[\psi]|b\rangle \tag{5.145}$$

を導出せよ。ただし，NG ボソン場として

$$\chi_i(x) = \int d^3k \frac{1}{[(2\pi)^3 2\omega_i(k)]^{(1/2)}}\left(\chi_{i,k}e^{i[\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_i(k)t]} + \chi_{i,k}^\dagger e^{-i[\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_i(k)t]}\right) \tag{5.146}$$

の形を仮定せよ。シンボル $|b,\chi_i(k)\rangle$ は，$|b\rangle$ と運動量 $\vec{k}$ の $\chi_i$ ボソンにより構成されている状態である。

この低エネルギー定理の詳しい説明は [26] にある。そこでは，この定理がいくつかの反応に応用されている。パイオン物理におけるカイラル SU(2)×SU(2) 理論への応用では，Callan-Treiman の関係と呼ばれる K レプトン緩和の新しい導出がなされている。これは K→ $l\pi$ と K→ $l2\pi$ 緩和との間の関係である（$l$ はレプトン）。カレント代数理論（current algebra theory）の多くの結果が対称性の再構成により得られることが示されている。

## 5.5　c-q 転化と結晶中のフォノン

今までは空間的に一様な秩序状態のみを扱ってきた。しかしながら，現実には変化に富んだ秩序状態があり，その多くはなんらかの空間構造をもっている。ラグランジアンが与えられても，いかなる種類の秩序が可能か予想することは困難である。ふつうその解析は，可能な選択肢を示唆するある種の直感や物理的な理由づけによって始められる。そのような秩序状態が実現可能と仮定し，それがラグランジアンから得られる基礎方程式と矛盾しないか否かを探る。この手順によって多くの解析がなされた。

この節では，空間的に非一様な秩序の簡単な例として，立方結晶の秩序をごく簡単に考察する。分子場を $\psi(x)$ と記そう。分子数が保存するので，ラグランジアンは位相変換 $\psi \to \exp[i\theta]\psi$ の下に不変でなければならない。多くの非相対論的モデルで見るように，$\psi$ の正準共役が $\psi^\dagger$ であるとする。このとき位相変換の生成子は

$$N = \int d^3x\rho(x) \tag{5.147}$$

である。ただし，

$$\rho(x) = \psi^\dagger(x)\psi(x) \tag{5.148}$$

とおいた。この $\rho$ は，位相変換にかかわる Nöther 流の第 4 成分であり，したがって分子数密度である。

しかし，いま考えているもっとも重要な不変性は，位相不変性ではなく空間並進不変性である。ラグランジアンは空間並進 $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{\theta}$（$\theta$ は連続パラメータ）の下に不変である。全運動量演算子 $\vec{P}$ がこの並進の生成子である。

さて，

$$n(\vec{x}\,) = \langle 0|\rho(x)|0\rangle \tag{5.149}$$

を定義する。これは巨視的な分子数密度である。秩序パラメータは，したがって

$$\vec{v}(\vec{x}\,) \equiv \vec{\nabla} n(\vec{x}\,) \neq 0 \tag{5.150}$$

で与えられる。この条件が示すように，秩序パラメータが $\vec{x}$ に依存しているのでこの秩序状態は一様ではない。

立方結晶の場合にはさらに条件が付加される。それは，$n(\vec{x})$ が三つの直交格子ベクトル $\vec{a}_i$（$i = 1, 2, 3$）に関して周期関数である

$$n(\vec{x} + \vec{a}_i) = n(\vec{x}\,) \tag{5.151}$$

というものである。

この題材で特筆すべき点は，空間並進が演算子の変換ではなくてc数である位置 $\vec{x}$ の変換だという点である。1.4 節で説明したように，c-q 転化定理によると，この $\vec{x}$ の変換はなんらかの演算子の変換によって生成されるべきである。

この演算子を定義するのは簡単である。いま空間並進対称性が自発的に破れたので，エネルギーに飛びのない NG ボソンが存在するはずだ。並進の自由度は3であるので，NG ボソン場は三つ現われる； $\chi_i\,(i=1,2,3)$. それらは互いに可換で，ベクトル $\vec{\chi}$ をなしている。空間並進はこれらの NG ボソン場の変換がつかさどる。しかしながら，$\vec{\chi}$ 自身も $\vec{x}$ に依存しているので，この位置もまた変換されねばならない。結局，空間並進を生成する NG ボソン変位は

$$\vec{\chi}(\vec{x},t) \to \vec{\chi}(\vec{x}+\vec{\theta}\,) + c\vec{\theta} \tag{5.152}$$

となる（$c$ は定数)。

この変位を生成する $\vec{P}$ のダイナミカルマップは

$$P_i = \int d^3k k_i(\vec{\chi}_k^\dagger \cdot \vec{\chi}_k) + c\int d^3x \dot{\chi}_i(x) \tag{5.153}$$

である。ここでは，ほとんどの結晶の場合に見られる，$\dot{\chi}_i$ が $\chi_i$ の正準共役である場合を考えている。$P_i$ の第1項は $\chi_i(x)$ 中の $\vec{x}$ の空間並進を生成し，第2項は $\chi_i$ の変位を生成する。さてc-q 転化定理によると，NG ボソンの変位にかかわる後者は，$n(\vec{x}\,)$ 中の $\vec{x}$ の変位を誘起するはずである。つまり，$\vec{x}$ と $\vec{\chi}$ は適切な関係を保って現われるはずである。たとえば，分子数密度のダイナミカルマップは，

$$\rho(x) = F[\vec{x} + (1/c)\vec{\chi}(x), \partial\vec{\chi}\,] \tag{5.154}$$

$$= n(\vec{x}\,) + \frac{1}{c}\vec{\chi}(x)\cdot\vec{\nabla}n(\vec{x}\,) + \cdots \tag{5.155}$$

の形で与えられる。

結晶を扱う場の量子論の系統的な体系は [27, 28, 29, 8] に出ている。この体系の一連の結晶における点欠陥エネルギー評価への応用とその結果の実験データとの比較は，[30] で系統的に行われた。

上記の NG ボソンは音響フォノンである。c-q 転化規則に基づいたこれらのフォノンの導出は，並進対称性の自発的破れに関する一般規則を示す有用な例となっている。次章ではボソン凝縮によって作られる巨視的物体を調べる。そこでも，巨視的物体の存在によって空間並進対称性が破れ，c-q 転化規則に

よって零エネルギー・モードが現われる。しかしながら，本章での状況と違って，これらの零エネルギー・モードは粒子モードではなく，離散的な零エネルギー・モードである。それは，これらの零エネルギー・モードが格子振動とは関係なく，ひろがった物体の重心の位置が任意に選べることの反映だからである；重心点をずらしてもエネルギーを消費しないので，零エネルギー・モードが現われるのである。

## 5.6 質量の自発的生成

スケール変換：

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{\theta}\psi(e^{\theta}x) \tag{5.156}$$

（$\theta$ は実パラメータ）の下に不変なモデルを考えよう。

この種のモデルの簡単なものは，Heisenberg 方程式

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) = \lambda\psi^{3}(x) \tag{5.157}$$

で与えられる。$\psi$ は Hermite 場で，$\lambda$ は無次元の結合定数である。

その次元が長さの逆数であるにもかかわらず，$\psi$ のスケール因子は $x$ と同じ $\exp\theta$ になることに注意せよ。これは，以下のように理解できる：

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}\psi'(x) = e^{3\theta}\partial_{z}^{\mu}\partial_{z\mu}\psi(z) \tag{5.158}$$

$$= e^{3\theta}\lambda\psi^{3}(z) \tag{5.159}$$

$$= \lambda\psi'^{3}(e^{\theta}x), \tag{5.160}$$

ただし，$z = e^{\theta}x$ である。

$\psi$ の次元は正準交換関係により決まる。$\psi(x)$ と $\dot{\psi}(y)$ の $t_x = t_y$ における交換関係は，$\delta(\vec{x}-\vec{y})$ に比例しており，その次元は長さの $-3$ 乗である。これより $\psi$ の次元が長さの逆数であることがわかる。

このモデルには長さの次元を与えるパラメータがない。場の量子論の初期の段階には，単に質量次元を作るための次元がないという理由で，このモデルには質量のある準粒子はないといわれた。ところが，自発的対称性の破れの機構が発見され事態が変わった。スケール不変でない真空を選ぶと，質量を有する準粒子が得られるのである。ここで疑問になるのは，c - q 転化条件がいかにして満たされたのかというものである；いかなる q 数変換が質量スケーリング $m \to \exp[-\theta]m$ を誘起するのか。この節でこの疑問に簡単に触れる。

スケール対称性の自発的破れの条件は

$$\langle 0|\psi^2(x)|0\rangle \neq 0 \tag{5.161}$$

と表わせる。ただし，場の鏡映反転 $\psi \to -\psi$ の下での不変性を考慮した。

スケール変換の生成子はスケール変換にまつわる Nöther 流から得られる。この解析は [31] で巧妙になされている。ここではそれを作ることはせず，単に生成子が作れるとだけ述べるに留める。

本章でなされた対称性の自発的破れの一般的議論により，変換の主要な担い手は NG ボソン $\chi(x)$ であることがわかった。そのスケール変換と変位は

$$\chi(x) \to e^{\theta}\chi(e^{\theta}x) + m\eta(e^{\theta} - 1) \tag{5.162}$$

と書ける。c 数 $\eta$ は無次元量とする。質量を有する準粒子は，スケール変換の下で次のように次元変換を受ける：

$$\phi(x, m) \to e^{\theta}\phi(e^{\theta}x, e^{-\theta}m) \tag{5.163}$$

（次元変換の生成子は [32] で与えられている）。質量を有する自由場の方程式

$$[\partial^{\mu}\partial_{\mu} + m^2]\phi(x) = 0 \tag{5.164}$$

がこの次元変換の下に不変であるべきなので，質量 $m$ もスケール変化をすることに注意せよ。

これらの変換は次のような変化を誘起する：

$$\left[m + \frac{1}{\eta}\chi(x)\right] \to e^{\theta}\left[m + \frac{1}{\eta}\chi(e^{\theta}x)\right] \tag{5.165}$$

と

$$\phi(x, \left[m + \frac{1}{\eta}\chi(x)\right]) \to e^{\theta}\phi(e^{\theta}x, \left[m + \frac{1}{\eta}\chi(e^{\theta}x)\right]) \tag{5.166}$$

である。(5.163) の結果，(5.166) 中の $m$ は変化しないことに注意せよ。

さて，$\psi$ のダイナミカルマップは

$$\psi = F[(m + \frac{1}{\eta}\chi), \phi(x, \left[m + \frac{1}{\eta}\chi(x)\right])] \tag{5.167}$$

の形をしていることが証明できる。それは次の理由による。$(m + \frac{1}{\eta}\chi)$ と $\phi$ はともに $\psi$ と同じく長さの逆数の次元をもち，そのため上記の変換の下でともに同じ因子 $e^{\theta}$ を得ることに注意を向けると，上記の変換によって $F$ は

$$F \to [e^{\theta}F]_{x \to e^{\theta}x} \tag{5.168}$$

と変化することがわかる。これはスケール変換の下での $\psi$ の振舞いと一致する。

ダイナミカルマップの上記の表式は，関係

$$\exp\left(\frac{1}{\eta}\chi(x)\frac{\partial}{\partial m}\right)\phi(x,m)=\phi(x,\left[m+\frac{1}{\eta}\chi(x)\right]) \tag{5.169}$$

によってさらに簡潔にできる。

このようにして [32]，長さの次元を有するパラメータのないモデルでも，質量が矛盾のない形で現われた。$m$ のスケール変化は $\chi$ 場の変換で誘起される。ここでもまた c - q 転化条件の重要な役割を発見した。

明らかに $m$ の値は任意である。$m$ は長さの単位を与えるので，これは問題ではない。

## 参 考 文 献


[1] J. Goldstone,. *Nuovo Cimento* **19** (1961) 154.

[2] Y. Nambu and G. Jona Lasinio, *Phys. Rev.* **122** (1961) 345.

[3] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, *Phs. Rev.* **127** (1962) 965.

[4] J. C. Ward, *Phys. Rev.* **78** (1950) 182.

[5] Y. Takahashi, *Nuovo Cimento* **6** (1957) 370.

[6] H. Umezawa, *Nuovo Cimento* **40** (1965) 450.

[7] L. Leplae, R. N. Sen and H. Umezawa, *Suppl. Prog. Theor. Phys.*, Communication issue for the 30th Anniversary of the Meson Theory by Dr. H. Yukawa, (1965) 637.

[8] H. Umezawa, H. Matsumoto and M. Tachiki, *Thermo Field Dynamics and Condensed States*, (North-Holland, Amsterdam, 1982).

[9] S. L. Adler, *Phys. Rev.* **B137** (1965) 1022.

[10] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **102** (1956) 1217.

[11] E. Nöther, *Goett. Nachr.* (1918) page 235.

[12] P. C. Hohenberg, *Phys. Rev.* **158** (1967) 383.

[13] N. D. Mermin and H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966) 1133.

[14] S. Coleman, *Comm. Math. Phys.* **3** (1973) 259.

[15] L. Leplae, H. Umezawa and F. Mancini, *Physics Reports* **10C** (1974) 153.

[16] H. Matsumoto, N. J. Papastamatiou and H. Umezawa, *Phys. Rev.* **D12** (1975) 1836.

[17] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *J. Phys.* **C16** (1973) 1181.

[18] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **110** (1958) 827.

[19] P. Higgs, *Phys. Rev.* **45** (1960) 1156.

[20] T. W. B. Kibble, *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554.

[21] J. Bardeen, L. Cooper and J. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108** (1957) 1175.

[22] M. Shah, H. Umezawa and G. Vitiello, *Phys. Rev.* **B10** (1974) 4724.

[23] E. Inonu and E. P. Wigner, *NAS* **39** (1953) 510.

[24] H. Joos and E. Weimar, *Nuovo Cimento* **32** (1976) 283.

[25] E. Weimar, *Acta. Phys. Austr.* **48** (1978) 201.

[26] Y. Fujimoto and N. J. Papastamatiou, *Nuovo Cimento* **40** (1977) 468.

[27] M. Wadati, H. Matsumoto, Y. Takahashi and H. Umezawa, *Fortschr. Phys.* **26** (1978) 357.

[28] M. Wadati, H. Matsumoto and H. Umezawa, *Phys. Rev.* **B18** (1978) 4077.

[29] M. Wadati, *Phys. Rep.* **50** (1979) 87.

[30] U. Krause, J. P. Kuska and R. Wedell, Monovacancy formation energies in cubic crystals, *Preprint* (1989).

[31] C. G. Callan, S. Coleman and R. Jackiw, *Ann. Phys.* **59** (1970) 42.

[32] A. Auliria, N. J. Papastamatiou, Y. Takahashi and H. Umezawa, *Phys. Rev.* **D5** (1972) 3066.

# 6
# 巨視的物体

## 6.1　ボソン変換

### 6.1.1　は じ め に

前章では，変化に富んだ巨視的な秩序が，量子場の系における粒子の凝縮によっていかに作られるかを調べた。しかし，現実には純粋な秩序系を見つけることはまれである；ほとんどすべての秩序状態は，巨視的な構造をもち秩序を崩すなんらかの欠陥をともなっている。結晶における格子欠陥，磁気秩序における磁気的ドメイン，超流動や超伝導における渦糸などがその例である。こうみると，これらの巨視的物体の起源は秩序状態にあると仮定するのが自然である。さらに，秩序状態のもっとも普遍的な様相はNG粒子の存在なので，これらの欠陥がNG粒子の凝縮の結果であると考えるのも一理あるだろう。

この考えは，秩序状態だけにかぎらない一つの視点を示唆する。NG粒子ばかりではなくいかなるボソンも真空に凝縮して，変化に富んだ巨視的物体を形作ることができる。これは，量子場の系に現われる巨視的物体という主題を提供する。

### 6.1.2　Planck 定数

巨視的な現象や古典的な現象ではPlanck定数 $\hbar$ が零になるとよくいわれる。この見方は,「量子」がミクロを意味し「古典」がマクロを意味するという誤っ

た概念に基づいている。前章でこれが真実でないことを見てきた。

事実 Niels Bohr も，古典的振舞いが現われるのは量子ゆらぎ $\hbar\Delta n$ が平均の量子数 $\hbar n$ より非常に小さいとき，つまり $\Delta n/n \ll 1$ の成り立つ場合であると強調している。この条件は $\hbar$ によらず，凝縮に関与している粒子の数にかかわるものである。このことは，巨視的な物体の出現には，$\hbar$ が零になることは必要でなく，多数の粒子が凝縮することがものをいうことを示している [1]。

本書では，量子場を起源とする巨視的物体を，演算子に基づく体系の枠組みで調べる。汎関数法に基づく扱いに関しては，文献 [2]，[3] 等を参照されたい。巨視的物体の演算子法に関しては，[4, 5] を見よ。

### 6.1.3 ボソン変換

Heisenberg 場の方程式

$$\Lambda(\partial)\psi(\vec{x},t) = j[\psi](\vec{x},t) \tag{6.1}$$

を満たすスカラー場 $\psi$ を考える。空間座標と時間とを区別するために，本節では空間座標を $(\vec{x},t)$ と記す。くりこみ理論の考え方に従って，$\Lambda$ の選びかたを，準粒子場の自由場方程式が

$$\Lambda(\partial)\varphi(\vec{x},t) = 0 \tag{6.2}$$

となるようにとる。そうすると，(6.1) は積分形

$$\psi(\vec{x},t) = \varphi(\vec{x},t) + \Lambda^{-1}(\partial)j[\psi](\vec{x},t) \tag{6.3}$$

で与えることができる。ただし，$\Lambda^{-1}$ は自由場方程式 (6.2) の Green 関数である。この表式をこの積分方程式の右辺にある $\psi(\vec{x},t)$ へくり返し代入していくと，$\psi$ の表式を $\varphi$ のべき展開の形で得る。これにより，ダイナミカルマップの一つの候補が得られる：

$$\psi(\vec{x},t) = F[\vec{x},t:\varphi]. \tag{6.4}$$

ここで，小節 5.1.4 で定義したボソン変換を思い出そう。これを $\varphi$ に作用させる：

$$\varphi(\vec{x},t) \to \varphi(\vec{x},t) + f(\vec{x},t) \tag{6.5}$$

ただし，c 数関数 $f$ は同じ自由場の方程式：

$$\Lambda(\partial)f(\vec{x},t) = 0 \tag{6.6}$$

を満たすものとする。

(6.3) より明らかなように，次の演算子もまた Heisenberg 方程式 (6.1) を満たす：

$$\psi(\vec{x},t) = \varphi(\vec{x},t) + f(\vec{x},t) + \Lambda^{-1}(\partial)j[\psi](\vec{x},t). \tag{6.7}$$

これは，**同じ場** $\psi$ に対する新しいダイナミカルマップを与える [6]：

$$\psi(\vec{x},t) = F[\vec{x},t:\varphi + f]. \tag{6.8}$$

こうしてダイナミカルマップ (6.8) が，別のダイナミカルマップ (6.4) からボソン変換によって得られることがわかる。

巨視的物体の古典的な振舞いは，$\psi$ の真空期待値：

$$\phi(\vec{x},t) = \langle 0(f)|\psi(\vec{x},t)|0(f)\rangle \tag{6.9}$$

として現われる。ただし，$|0(f)\rangle$ は，時空に関して非一様なボソン凝縮をして巨視的物体を作っている真空である。$\psi$ の他の行列要素は，巨視的物体と共存する準粒子の振舞いを表わす。$\phi(\vec{x},t)$ は場の秩序パラメータと呼ばれる。c 数関数 $f$ の時空依存性のために，場の秩序パラメータは $(\vec{x},t)$ の関数となる：

$$\phi(\vec{x},t) = \langle 0(f)|F[\vec{x},t:\varphi + f]|0(f)\rangle. \tag{6.10}$$

Heisenberg 方程式 (6.1) の両辺の真空期待値をとると，巨視的物体に対する古典的方程式を得る：

$$\Lambda(\partial)\phi(\vec{x},t) = \langle 0(f)|j[\psi](\vec{x},t)|0(f)\rangle. \tag{6.11}$$

大切なことは，この古典的方程式が Planck 定数 $\hbar$ の影響を含んでいることである。このことを理解するために，演算子 $\psi^n$ を考えてみよう。各 $\psi$ のダイナミカルマップには，c 数 $\phi$ だけでなく準粒子演算子のN積も含まれる。したがって，$\psi^n$ は $\phi^n$ ばかりでなくN積項の積も含む。N積項の積をN積に並べなおすと，準粒子の生成・消滅演算子の縮約 (contraction) により c 数が出てくる。各縮約によって $\hbar$ の次数の c 数が作られるので，

$$\langle 0(f)|\psi^n|0(f)\rangle = \phi^n + 0(\hbar) \tag{6.12}$$

を得る。ただし，$0(\hbar)$ は $\hbar$ に関する正次数の項を表わす。したがって，Feynman 図にループを作る縮約を無視したときだけ，$\langle 0(f)|\psi^n|0(f)\rangle$ が $\phi^n$ に置き換えられる。この近似はツリー (tree) 近似と呼ばれる。

ツリー近似においてのみ，方程式 (6.11) は Heisenberg 方程式と同じ形になる：

$$\Lambda(\partial)\phi(\vec{x},t) = j[\phi](\vec{x},t). \tag{6.13}$$

**ツリー近似しないと，古典方程式は元の Heisenberg 方程式の形にはならない**。つまり，場の量子論の古典極限は元のラグランジアンに対する Euler 方程式を再現しない。このことは，上に指摘したように，ループ補正が Planck 定数 $\hbar$ の次数であることを考慮すれば明らかである。前の小節で見たように，巨視的振舞いは $\hbar$ の消失を意味せず，それは多くの粒子の凝縮によって生成されるのである。したがって，$\hbar$ の次数であるにもかかわらず，**ループ補正が巨視的振舞いに影響を与える**ことも驚くに値しない。

量子電磁気学におけるループ補正により Maxwell 方程式が受ける修正でよく知られた実例は，Lamb シフトを与えた Coulomb ポテンシャルの修正である。これは，放射補正による原子内電子のエネルギー準位の変化である。

歴史的には，場の量子論は，正準量子化の方法により古典場の理論から導入された。いま，場の量子論から古典的方程式を導き出そうとしている。ループ補正を含んだ厳密な古典方程式が元の古典方程式と同じではないということは，たいへん興味深い。元の古典方程式はツリー近似でのみ再現される。

上記のボソン変換理論を一般的にまとめてみよう。その運動がある Heisenberg 方程式で制御されている Heisenberg 場の組 $\psi_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ を考えよう。その解が，準粒子場 $\varphi_a$ $(a=1,2,\cdots,m)$ によって表現されているとする。なお，合成粒子がいくつか存在する可能性があるので，$m$ は必ずしも $n$ と一致する必要はない［湯川相互作用する陽子と中性子場のモデルには 3 種類の準粒子（陽子，中性子，合成粒子である重陽子）で記述される解が存在することを思い出してみよ］。これが可能なのは，可付番無限集合を有限回掛けても可付番無限集合となるからである（重陽子の存在が自由度の数を増やすことはない）。準粒子場の自由方程式は

$$\Lambda_a(\partial)\varphi_a(\vec{x},t) = 0 \tag{6.14}$$

と記される。Heisenberg 場のダイナミカルマップは

$$\psi_i(\vec{x},t) = F_i[\vec{x},t:\varphi_1,\cdots,\varphi_m] \tag{6.15}$$

である。ここで，ボソン変換

$$\varphi_a(\vec{x},t) \to \varphi_a(\vec{x},t) + f_a(\vec{x},t) \tag{6.16}$$

を施そう。ただし，

$$\Lambda_a(\partial)f_a(\vec{x},t)=0 \tag{6.17}$$

とする。上で述べた理論によると，以下のダイナミカルマップも同じ Heisenberg 方程式：

$$\psi_i(\vec{x},t)=F_i[\vec{x},t:\varphi_1+f_1,\cdots,\varphi_m+f_m] \tag{6.18}$$

を満たす [1, 7]。したがって，古典場は，$\psi_i$ の真空期待値で得られる。この章では特に断らないかぎり記法を簡略にするため，一つの Heisenberg 場 $\psi$ と一つの準粒子場 $\varphi$ で話を進める。

### 6.1.4 誘起されたポテンシャルと零エネルギー・モード

前の小節の考察で，ボソン凝縮によって巨視的物体が生成されるときには，Heisenberg 場 $\psi$ のダイナミカルマップは $\psi=\phi+\cdots$（点々は，準粒子のN積を表わす）の形で与えられることがわかった。ここで疑問になるのは,「どのような種類の準粒子が存在するか？」ということである。巨視的な物体には量子粒子に作用するあるポテンシャルがともなっていて，そのポテンシャルによって零エネルギー準位を含んだ多くの準粒子エネルギーが生成される [8]。

簡単のためこの小節では，場の縮約を無視したツリー近似（$\hbar$ の零次）を用いる；ここでの考察は，$\hbar$ のすべての次数へも拡張できる。この近似では，いかなる Heisenberg 演算子の準粒子によるN積展開も，単に準粒子演算子によるべき展開となる。そこで $\psi$ のダイナミカルマップを

$$\psi=\sum_{n=-1}^{\infty}\psi_n \tag{6.19}$$

と書こう。ただし，$\psi_n$ は準粒子演算子の $(n+1)$ 次項である。これを

$$\psi\to\psi_\lambda=\sum_{n=-1}^{\infty}\lambda^n\psi_n \tag{6.20}$$

の形におき，同時に Heisenberg 方程式も

$$j[\psi]\to\frac{1}{\lambda}j[\lambda\psi_\lambda] \tag{6.21}$$

（$\lambda=1$）の形におくと便利である。準粒子の次数を数えやすくするため $\lambda$ を入れた。$\lambda^n$ 項の準粒子演算子の次数は $n+1$ である。

さて，(6.20) を Heisenberg 方程式

$$\Lambda(\partial)\psi = j[\psi] \tag{6.22}$$

に代入し，すべての次数に対して $\lambda^n$項 をとりだそう。そうすると，一連の式；

$$\Lambda(\partial)\psi_{-1} = j[\psi_{-1}] \tag{6.23}$$

$$(\Lambda(\partial) - j_1[\psi_{-1}])\psi_0 = 0 \tag{6.24}$$

$$(\Lambda(\partial) - j_1[\psi_{-1}])\psi_1 = \frac{1}{2}j_2[\psi_{-1}][\psi_0]^2 \tag{6.25}$$

などが得られる。この表式中で，$j_n[\phi] \equiv \delta^n j[\phi]/\delta\phi^n$ とおいた。

(6.23) をみると，$\psi_{-1}$ がツリー近似での古典方程式を満たしていることがわかる：これは秩序パラメータである（つまり，$\psi_{-1} = \phi$）。巨視的物体の存在を反映したポテンシャルが存在するとはいえ，(6.24) より，$\psi_0$ は**線形斉次**方程式に従うことがわかる。したがって，$\psi_0$ が準粒子場である。(6.25) をみると，$\psi_1$（以下に続くすべての $\psi_n$ も）は，$\psi_{-1}$ と $\psi_0$ によって表わされることがわかる。**つまり，(6.20) で $\lambda = 1$ としたものは，巨視的物体の存在下におけるダイナミカルマップである。**

考察中の巨視的物体が静的であると仮定して状況を簡単にしよう。この場合，秩序パラメータ $\phi = \psi_{-1}$ は時間によらない。したがって，準粒子場の $\psi_0$ の方程式は，$j_1[\psi_{-1}]$ がポテンシャルとして作用する固有値方程式になる：

$$\Lambda(-i\omega, \vec{\nabla})u_\omega(\vec{x}\,) - j_1[\psi_{-1}]u_\omega(\vec{x}\,) = 0. \tag{6.26}$$

**この方程式は常に零固有値をもつ。**

静的秩序パラメータに対する方程式 (6.23) の両辺に $\vec{\nabla}$ を作用すると，

$$\Lambda(0, \vec{\nabla})\vec{\nabla}\psi_{-1} - j_1[\psi_{-1}]\vec{\nabla}\psi_{-1} = 0 \tag{6.27}$$

を得る。これより，$\omega = 0$ の場合，(6.26) は $\vec{\nabla}\psi_{-1}$ を解にもつことがわかる。

つまり，準粒子場 $\psi_0$ は，$(1/\sqrt{2\omega})(\vec{\chi} + \vec{\chi}^\dagger)\vec{\nabla}\phi$ の形の項をその一部分としてもっているのである。ただし，$\chi$ は零エネルギー・モードの消滅演算子であり，$\omega$ はそのエネルギーである。しかしながら，$\omega$ は零であるから，この表式は不可能である。これは，不連続な零エネルギー・モードが励起状態として観測されず，したがって粒子モードでないことを示している。演算子 $(\vec{\chi}, \vec{\chi}^\dagger)$ が使えないので，

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij} \tag{6.28}$$

を満たす正準演算子

$$\vec{q} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\vec{\chi} + \vec{\chi}^\dagger) \tag{6.29}$$

$$\vec{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\vec{\chi} - \vec{\chi}^\dagger) \tag{6.30}$$

にかえる。分母に零エネルギーが現われないように，$\vec{q}$ と $\vec{p}$ で我々の定式化を進める。

結局，準粒子場 $\psi_0$ は

$$\psi_0 = -\vec{q}\cdot\vec{\nabla}\psi_{-1} + \varphi \tag{6.31}$$

の形をもつ。ただし，$\varphi$ は零エネルギー・モードを除いた準粒子場である [9]。この準粒子場 $\varphi$ の消滅演算子を $\alpha_k$ と記す。$\varphi$ 中の $\alpha_k$ の波動関数は零でない固有値の固有関数であり，したがって $-\nabla_i\psi_{-1}$ とは直交している。これより，**量子座標** $\vec{q}$ とその共役運動量 $\vec{p}$ が $\alpha_k$ と可換であることがわかる。このように，$\vec{q}$ が量子場の演算子としてよりはむしろ量子力学的演算子として作用するので，この零エネルギー・モードを他の粒子準位と別個に扱うことができる。

結局，ダイナミカルマップ (6.20) は，

$$\psi = \phi - \vec{q}\cdot\vec{\nabla}\phi + \varphi + \cdots \tag{6.32}$$

となる。点々は，$\vec{q}$ や $\vec{p}$ と $\varphi$ 場のN積で構成された高次の積を表わす。これは，

$$\psi(x) = \phi(\vec{x} - \vec{q}) + \varphi + \cdots \tag{6.33}$$

と書き直せる。$\vec{x}$ と $\vec{q}$ が $(\vec{x} - \vec{q})$ の組合せで現われていることに注意せよ。

この小節では，粒子凝縮で生まれる巨視的物体の二つの特徴を学んだ。まず第一に，巨視的物体には準粒子の波動関数に影響を与えるポテンシャルが付随している。このポテンシャルは，自己無撞着ポテンシャルあるいは巨視的ポテンシャルと呼ばれている。第二に，零エネルギー・モードが現われる。これは，巨視的物体の存在によって空間並進対称性が自発的に破れたことに付随する NG モードである；巨視的物体の位置が任意なので，その移動はエネルギーを費やさず，それが零エネルギーとして現われる。これによって，$(\vec{q}, \vec{p})$ に結びついた量子力学的な自由度が産み出される。

こうして，準粒子の凝縮によって，巨視的物体が存在する新しい真空が産み出されるいう描像を得た。その巨視的物体は，準粒子の状態に作用する巨視的

ポテンシャルをともなっている。巨視的ポテンシャルのよく知られた例として，混合状態超伝導体中の渦糸により作られるものがある；渦糸ポテンシャルは，ペア（対）場の秩序パラメータ $\Delta(\vec{x}) = \langle 0(f)|\psi_\downarrow\psi_\uparrow|0(f)\rangle$ で近似的に与えられる。これは，電子に作用する。このポテンシャルに捕まった電子がもっているエネルギーはコア（芯）・エネルギーと呼ばれ，混合状態の自由エネルギーに重要な寄与をする。

### 6.1.5 量子力学的演算子

前の小節では，場の量子論において巨視的な物体が作られると，いかにして量子力学的演算子 $\vec{q}$ や $\vec{p}$ が現われるかを学んだ。c 数の位置 $\vec{x}$ と q 数の位置 $\vec{q}$ が $(\vec{x}-\vec{q})$ の組合せで現われることを知った。この小節では，この $\vec{q}$ の出現が c - q 転化規則のためであることをみる。

1.4 節と 5.5 節で議論した c - q 転化規則を思い出してみよう。とくに 5.5 節で，結晶における秩序パラメータの $\vec{x}$ 依存性は，$[\vec{x}+(1/c)\vec{\chi}]$ の組合せでのみ現われることが示された。ただし，$\vec{\chi}$ はフォノン場である。同じ議論は，秩序パラメータ $\phi(\vec{x},t)$ にもあてはまる。したがって，Heisenberg 演算子のダイナミカルマップにおいて，$\vec{x}$ が $\vec{x}-\vec{q}$ の組合せでのみ現われるのは，q 数変換 $\vec{q}\to\vec{q}-\vec{\theta}$ が c 数変換 $\vec{x}\to\vec{x}+\vec{\theta}$ を $\vec{x}-(\vec{q}-\vec{\theta}) = (\vec{x}+\vec{\theta})-\vec{q}$ のように誘起するからである [8, 1]。

$\vec{x}$ が実数であるから，$\vec{q}$ は Hermite である。この $\vec{q}$ 変換の生成子は，$\vec{q}$ の正準共役量である運動量演算子 $\vec{p}$ のはずだ。$\vec{q}$ の並進は，後者の演算子で誘起されるからである。これも Hermite であるはずだ。さらに，ラグランジアンが空間並進に関して不変であるので，空間座標の原点が定数だけ移動しても，いかなる物理的な変化も起こさず，したがって，いかなるエネルギーも消費するはずがない。このことは，この原点の移動が零エネルギー・モードであることを意味する。つまり，$\vec{p}$ は時間に依存しない [8, 1]：

$$\dot{p}_i = -i[p_i, H] = 0. \tag{6.34}$$

結晶中のフォノン場 $\chi$ とここで考察している演算子 $\vec{q}$ とでは，たいへんな違いがある。フォノンは飛びのないエネルギーをもった粒子モードである；その最低エネルギーは零である。これはフォノン・モードが格子振動に起因するためである。一方，巨視的物体の存在が空間並進対称性を自発的に破る場合は，NG モードの粒子が現われる理由がない。なぜならば，そのような状況で現われる NG モードは，巨視的物体の位置が任意であることを反映しているからで

ある；エネルギーの消費なしに物体の位置移動ができる。したがって，この NG モードは，離散的な零エネルギー・モードである。つまり，$\vec{p}$ に関連した零エネルギー・モードは，空間並進対称性の自発的破れに起因する NG モードである；空間的に非一様な巨視的物体の存在のため，真空 $|0(f)\rangle$ が空間並進の下で変化し，NG 零エネルギー・モードを誘起する。

前にもみたように，$\vec{q}$ と $\vec{p}$ は正準演算子の**量子力学的**な組をなしている：

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij}. \tag{6.35}$$

**問 1** 空間回転の c - q 転化を議論せよ。
ヒント：回転

$$x_i \to x_i{}' = c_{ij}x_j, \quad c_{ik}c_{jk} = \delta_{ij} \tag{6.36}$$

を考えよ。q 数変換

$$q_i \to q_k c_{ki}, \quad p_i \to p_k c_{ki} \tag{6.37}$$

を実行せよ。これによって変換：

$$x_i - q_i \to (x_k{}' - q_k)c_{ki} \tag{6.38}$$

が誘起される。これには二つの働きがある：すべての q 数ベクトルを回転し，$\vec{x} \to \vec{x}'$ の置き換えをする。このための生成子は角運動量演算子

$$\vec{L}[q, p] = \vec{q} \times \vec{p} \tag{6.39}$$

である。

しかし，これだけでは不十分である：準粒子 $\alpha_k$ の消滅演算子には運動量の添え字があるが，それも $\vec{k} \to \vec{k}'$ なる回転を受けなければならない。よく知られているように，これは量子場のふつうの角運動量演算子によって生成される：

$$l_i = -\frac{i}{2}\epsilon_{ijl}\int d^3k\alpha_k^\dagger\left(k_j\frac{\partial}{\partial k_l}\right)\alpha_k + h.c. \tag{6.40}$$

ただし，$h.c.$ は，その前にある項の Hermite 共役の意味である。準粒子演算子は全運動量 $\vec{P}$ には寄与しないが，このように空間回転の生成子である角運動量に寄与する。

巨視的物体が球対称でない場合は，真空の回転対称性を破る。この自発的に破れた回転対称性は新しい零エネルギー NG モードを生成し，交換関係

$$[s_i, s_j] = i\epsilon_{ijk}s_k \tag{6.41}$$

を満たす，回転にかかわる量子力学的演算子 $\vec{s}$ となる。この演算子は，量子力学的スピン演算子と呼ばれる。

結局，回転の生成子は，

$$\vec{L} = \vec{L}[q, p] + \vec{l} + \vec{s} \tag{6.42}$$

で与えられる。

座標の回転はエネルギーを変化させないので，ハミルトニアンと可換である：$[H, \vec{L}] = 0$．これは，$\vec{L}$ が時間に依存しないことを意味する：

$$\dot{L}_i = 0. \tag{6.43}$$

本書では，簡単のため，とくに断らないかぎり $\vec{s}$ の関与する場合は扱わない。したがって，

$$\vec{L} = \vec{L}[q,p] + \vec{l} \tag{6.44}$$

である。これの真空期待値は量子力学的部分：

$$\langle 0(f)|\vec{L}|0(f)\rangle = \vec{L}[q,p] \tag{6.45}$$

である。

Hilbert 空間は，準粒子 Fock 空間と量子力学的 Hilbert 空間の積である。準粒子 Fock 空間は，生成演算子 $\alpha_k^\dagger$ を真空 $|0(f)\rangle$ にくり返し作用して作る。この真空は，ボソン変換関数 $f(\vec{x},t)$ で特徴づけられる粒子凝縮をしている。この Fock 空間を $\mathcal{H}(f)$ と記し，$(\vec{q},\vec{p})$ に関連した量子力学的 Hilbert 空間を $\mathcal{H}(q,p)$ と書く。全状態ベクトル空間は $\mathcal{H}(f)\times\mathcal{H}(q,p)$ である。

この小節では，量子場の系があらゆる種類の自由度になり得ることを見た；準粒子に対する $\alpha_k$，量子力学的自由度に対する $(\vec{q},\vec{p})$，それに古典的に振る舞う巨視的物体に対する $\phi(\vec{x})$ である。次の小節では，巨視的物体が存在しない場の量子論における準粒子描像と同様に，この議論が漸近条件に基づいていることを見る。

### 6.1.6 自由粒子の漸近条件

本節では，(6.9) の場の秩序パラメータ $\phi$ が無限遠 $|\vec{x}|\to\infty$ で十分はやく減少し，Fourier 変換可能であると仮定する。巨視的物体が存在する領域から遠く離れると，量子粒子は自由になる；小節 4.6.3 で議論した漸近場の場合と同じ理由で，漸近場が自由である状況を再び得る。小節 4.6.3 で行ったように，これらの自由場を自由準粒子場として使えるだろう。

これらの自由粒子を作るのは空間並進と可換であるから，前の小節で指摘したように，量子力学的演算子は準粒子演算子と可換である：

$$[\vec{q},\alpha_k] = [\vec{p},\alpha_k] = 0 \tag{6.46}$$

（量子力学的演算子の役割は，汎関数積分による定式化では馴染みの集団座標の役割と似ている [10]。量子座標と集団座標との関係は，[9] に議論されている）。

ダイナミカルマップの完全な形は，

$$\psi(\vec{x},t) = F[\vec{x}-\vec{q}, p : \alpha_k^\dagger, \alpha_k] \tag{6.47}$$

で与えられる。(6.34) によれば，$H$ のダイナミカルマップは $\vec{q}$ を含まない。

ハミルトニアンのこの性質は，大域的演算子がもつ一般的な特徴である。大域的演算子とは，4.10 節で述べたように，ある種の局所演算子を空間積分したものである。いかなる局所演算子も，$\vec{q}$ を常に $\vec{x}-\vec{q}$ の形で $\vec{x}$ とともに含むので，空間積分により $\vec{q}$ が消える。したがって，たとえば $N$ などの大域的演算子のダイナミカルマップには $\vec{q}$ が含まれないのである：

$$N(t) = N[t : \vec{p}, \alpha_k^\dagger, \alpha_k]. \tag{6.48}$$

ところで，巨視的物体がいっさい存在しない場の量子論を議論した 4.6 節では，ハミルトニアンのダイナミカルマップが準粒子演算子を，個数演算子

$$N_k = \alpha_k^\dagger \alpha_k \tag{6.49}$$

の形でのみ含むことを見た。今の場合にも同じ議論が適用できる。こうしてダイナミカルマップ

$$H = H[\vec{p} : N_k] \tag{6.50}$$

を得る。

(6.39) によると，回転の生成子 $\vec{L}$ は $\vec{q}$ を $\vec{q}\times\vec{p}$ の形で含んでいる。これは $\vec{L}$ が大域的演算子ではないからである。それを見るために，スカラー場の量子論における角運動量演算子：

$$L_i = \epsilon_{ijk} \int d^3x \; x_j T_{k0} \tag{6.51}$$

を思い出そう。ただし，$T_{\mu\nu}$ はエネルギー・ストレス・テンソルである。この被積分関数は純粋の c 数 $x_j$ を陽に含んでおり，したがって $L_i$ は大域的演算子ではない。

この小節を閉じる前に二つたいへん重要な注意をしておく：

一つめは，真空期待値や Fock 空間 $\mathcal{H}(f)$ の他の状態ベクトル間でとられた行列要素は，c 数ではなく $\vec{q}$ と $\vec{p}$ で構成された量子力学的演算子だということである。適切な条件の下では，特定の位置と速度の値に十分鋭い山のある波束を作れることがしばしばある。その場合には，$\vec{q}$ や $\dot{\vec{q}}$ をそれらの期待値 $\vec{c}$，$\vec{v}$

で置き換えることが，粗い議論では許されるであろう。このとき巨視的物体は古典的と呼ばれる。**この古典極限では (6.11) は純粋に古典的（つまり，c 数）方程式になる。**とにかく，c 数を得るためには，$\mathcal{H}(q,p)$ 中の状態ベクトル間での行列要素をとらなければならないのである。

二つめの注意は次のものである：場の秩序パラメータ $\phi$ はボソン変換関数 $f$ の汎関数であるが，$\phi$ が Fourier 変換可能であるべきだという要請は，Fourier 変換をもたない**異常なボソン変換関数** $f$ を禁止しているわけではない。実際，粒子凝縮によって作られた巨視的物体の物理では，異常なボソン変換関数がたいへん重要な役割をするのである。

### 6.1.7 運動量演算子

さて，巨視的物体は空間座標系を決定するという重要な定理を導入しよう。これは,「準粒子が自由となる漸近領域の位置が巨視的物体の位置との関係で定義される」という事実から導かれる。粒子が自由になるためには，物体の存在するところから遠く離れなければならない（小節 4.6.3 を見よ）。

すでに指摘したように，**準粒子場（したがって Heisenberg 場そのもの）は，$\vec{x}-\vec{q}$ の組合せでしか $\vec{x}$ に依存できない：**

$$\psi(\vec{x},t) = F[\vec{x}-\vec{q},\vec{p}:\varphi(\vec{x}-\vec{q},t,\vec{p})]. \tag{6.52}$$

これは，空間並進を生成する全運動量演算子のダイナミカルマップが準粒子を含んでいないことを意味する：

$$\vec{P} = \vec{p}. \tag{6.53}$$

### 6.1.8 準静的物体と異常性

物体を特定の座標系で静止させられるとき，準静的と呼ぶ。

もっとも重要な定理として，**準粒子エネルギー $\omega_k$ がある $\vec{k}$ の値で消えないかぎり，準静的物体に関するボソン変換パラメータ $f(\vec{x},t)$ の Fourier 変換はできない**というものがある。ある準静的物体を考え，それが静止している座標系を採用したとする。この場合，この物体の $f$ は時間に依存しない：$f=f(\vec{x})$. かりにこの $f$ が Fourier 変換をもつと仮定し，その Fourier 振幅を $f(\vec{k})$ と記そう。すると，自由場の方程式 (6.6) は $\omega_k f(\vec{k})=0$ となる。これより，$\omega_k \neq 0$ に対して $f(\vec{k})=0$ を得る。上記の定理はこの直接の帰結として得られる。

$\omega_k$ が有限の $\vec{k}$ の値（たとえば $\vec{k}_1$）で零になるときは，$f(\vec{k}_1)$ は必ずしも零ではない。この場合には，空間的周期 $2\pi/|\vec{k}_1|$ をもつ静的な物体が存在可能である。金属における多くの周期的スピン相はこの種の実例である。

以下ではこの種の物体は考えない。そこで，$\vec{k} \neq 0$ に対しては $\omega_k \neq 0$ であると仮定する。さらに，空間的に一様な基底状態に対応している，$f$ が定数である場合は除くことにする。

上記の定理より，静的な物体に対する $f(x)$ は Fourier 変換不可能であることになる。推進演算により物体を静止系から運動系に移せるので，準静的物体の $f(\vec{x},t)$ にはその Fourier 変換を禁止するような異常性のあることがわかる。この異常性がトポロジカル（位相的）であることを以下で調べる。これらの物体は，**位相的物体**と呼ばれる。注意しておくが，たとえ $f$ が Fourier 変換をもたなくても，場の秩序パラメータ $\phi(\vec{x},t)$ は Fourier 変換可能である。この章の以下の部分では，準静的物体に話をかぎることにする。

本章のこれまでの小節で見てきたように，ボソン変換関数は $\vec{x}-\vec{q}$ の組合せでのみ $\vec{x}$ に依存する。したがって，静止している巨視的物体に対するこの関数は，

$$f = f(\vec{x}-\vec{q}) \tag{6.54}$$

の形をしているはずである。

ラグランジアンがある種の推進の下に不変であるとする。その推進により静止系はある速度で移動する運動系となる。この生成子を $\vec{K}$ と記そう。これは，q 数 $\vec{q}$ を $\vec{q}\,'$ に変換する。この推進後の座標 $(\vec{x},t)$ と $\vec{q}$ は，$\vec{q}$ の変換が $\vec{x}$ の推進を誘起するような組合せで現われなければならない（ c - q 転化規則）。この組合せにより一般化された座標 $\vec{X}$ が決まる [11, 12, 1]：

$$\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}-\vec{q}, t, \vec{p} : \theta). \tag{6.55}$$

ただし，$\theta$ は巨視的物体の位置と速度を指定するパラメータである。

量子力学的 Hilbert 空間 $\mathcal{H}(q,p)$ の状態ベクトルで $\vec{q}$ と $\vec{p}$ の期待値をとると，巨視的物体の位置と速度ベクトルが決まる。

この運動座標系では，ボソン変換関数は，

$$f = f(\vec{X}) \tag{6.56}$$

となる。$f$ に対する自由場方程式 (6.6) はこの推進の下に不変でなければならないので，推進された $f$ も同じ自由場方程式の解である。

推進の生成子 $\vec{K}$ は局所的密度の空間積分で与えられるが，この局所的演算子は純粋な演算子ではなく c 数 $\vec{x}$ と $t$ を陽に含んでいる：

$$K_i = \int d^3x[x_i T_{00}(x) - tT_{i0}(x)]. \tag{6.57}$$

つまり $\vec{K}$ は局所的演算子でなく，したがって，このダイナミカルマップは $\vec{q}$ を含み得るのである。

### 6.1.9 多数の物体と多数の保存則

ボソン変換は巨視的物体にかかわる場の秩序パラメータがもつ非線形効果を線形化するうまい方法である。このことは，多数の巨視的物体を調べると明らかになる。$f$ に対する方程式 (6.6) が線形かつ斉次なので，多数の巨視的物体を得るには，単に，個々の巨視的物体に関するボソン変換パラメータの**線形**結合をとって，ボソン変換パラメータを作ればよい。

前の小節で，ボソン変換関数 $f(\vec{X}(\vec{x}-\vec{q},t,\vec{p}:\theta))$ によって推進された物体を考察した。これは，$\theta$ の選び方によらず (6.6) の解である；$\theta$ は物体の位置と速度を指定する。したがって，$n$ 種類の $\theta$ に対する $f$ の線形結合をとると，$n$ 個の物体が生まれる：

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f(\vec{X}(\vec{x}-\vec{q}_i,t,\vec{p}_i:\theta_i)). \tag{6.58}$$

$\theta_i$ により，$i$ 番目の準静的物体の位置と速度が指定される。どの $f_i$ 中の $\vec{x}$ も他の $f_i$ 中の $\vec{x}$ とは独立に変更可能なので，各 $f_i$ は独自の量子力学的演算子 $(\vec{q}_i,\vec{p}_i)$ をたずさえている；互いに可換な量子力学的演算子が $n$ 組存在する。$\vec{q}_i$ は $i$ 番目の物体の位置演算子と呼ばれ，$\vec{p}_i$ は運動量演算子と呼ばれる。

この $f$ を用い 6.1.3 節の方法に従えば，巨視的物体の集団を扱うことができる [12]。全運動量は，あらゆる $f_i$ 中にある $\vec{x}$ の並進を生成しなければならない。それは，

$$\vec{P} = \vec{p} = \sum_i \vec{p}_i \tag{6.59}$$

で与えられる。6.1.7 節で議論したように，量子粒子からの $\vec{P}$ への寄与はない。

他の変換では準粒子も変換を受けるので，状況は異なってくる。しかし，それらの生成子も真空期待値を考えれば，準粒子からの寄与はなく純粋に量子力学的演算子が見つかる。したがって，各物体へ独立に作用するそれぞれの変換

の生成子が存在し，全系の生成子はそれらの和で与えられる。つまり，全ハミルトニアン，角運動量，推進生成子をそれぞれ $H$，$\vec{L}$，$\vec{K}$ とおくと，

$$\langle 0(f)|H|0(f)\rangle = \sum_i H_i[p_i] \tag{6.60}$$

$$\langle 0(f)|\vec{L}|0(f)\rangle = \sum_i \vec{L}_i[q_i, p_i] \tag{6.61}$$

$$\langle 0(f)|\vec{K}|0(f)\rangle = \sum_i \vec{K}_i[q_i, p_i] \tag{6.62}$$

となる。これらは量子力学的な演算子である。

場の量子論では，すべての保存量は Nöther 流と結びついている（5.1.6 節を見よ）。時間と空間の並進に関連する Nöther 流から，全ハミルトニアンと全運動量が得られる。いったい，どうやってそのように多数の運動量 $\vec{p_i}$ やハミルトニアン $H_i$ が現われるのか疑問になる。答は次のようになる。物体が多数存在する系の全エネルギーは，それらの物体の速度の関数である：$E(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots)$. パラメータ $\vec{\theta}_i$ の関数である速度パラメータが元の場の方程式には現われず，その解にのみ現われることに注目しよう。すると，あらたな保存量 $\partial E/\partial v_i$ が得られる。これより巨視的物体が二つ以上ある場合，いかにして，**一つの Nöether 保存則から多数の物体にかかわる多くの保存則が生まれるかがわかる。**

### 6.1.10 突発的対称性

前の小節では，ある時空変換（時間・空間並進，回転，推進で構成されている）の下で不変なラグランジアンが記述する系においては，観測にあたって同種の時空対称性が多数現われる例を見た。これは，元のラグランジアンには存在しない新しい対称性が，観測量の対称性として現われる場合のあることを示している。この現象は，突発的対称性（emergent symmetry）と呼ばれる。

突発的に対称性が現われる理由は，観測される対称性が Heisenberg 演算子のダイナミカルマップの構造によって決まるという事実にある。ダイナミカルマップは（巨視的物体の速度のような）多数のパラメータ $\theta_i$ に依存することがあるので，これらのパラメータの変化によって，エネルギーの縮退した真空集合中をわたり歩き新しい対称性が出現するのである。

重要な点は，ダイナミカルマップの構造によっては巨視的物体の創造が突発的対称性を誘起し得るということである。超伝導体中の渦糸が格子構造を呈するのも，その実例である [1]。

## 6.2 相対論的モデル

### 6.2.1 (1+1) 次元物体

結局，量子力学的自由度が存在するのは巨視的物体の時空に関する不変変換を実現するためであるので，どのようにしてこれらの変換がもたらされるかを調べると，その振舞いをより明白にできる。そこで，相対論的不変性をもつ方程式に従う，空間 1 次元系を例にして説明する。この系の Poincaré 代数は，

$$[H, p] = 0 \tag{6.63}$$

$$[K, H] = -ip \tag{6.64}$$

$$[K, p] = -iH \tag{6.65}$$

で与えられる。

ハミルトニアン $H$ のダイナミカルマップから始めよう。巨視的物体の静止系 $(p = 0)$ では系のエネルギーは物体の質量と自由準粒子のエネルギーの和で与えられる：

$$M(N_k) = M_0 + H_0. \tag{6.66}$$

これは静止エネルギー演算子である。ただし，$M_0$ は巨視的物体の質量と呼ばれる c 数で，$H_0$ は準粒子の自由ハミルトニアンである：

$$H_0 = \int dk\, \omega_k \alpha_k^\dagger \alpha_k. \tag{6.67}$$

時空座標は巨視的物体に付随しているので，$M(N_k)$ は Poincaré 群の変換の下に不変である。

さらに (6.50) より，この系のハミルトニアンのダイナミカルマップが，運動量 $p$ と準粒子数 $N_k = \alpha_k^\dagger \alpha_k$ で構成されていることがわかる：$H = H[p, N_k]$. したがって特殊相対論によると，$H$ のダイナミカルマップは

$$H(p : n_k) = \sqrt{p^2 + M^2(N_k)} \tag{6.68}$$

となる [11]。$M$ は $q$ にも $p$ にもよらず $N_k$ のみに依存していることを注意しておく。このことは，通常用いられている関係 $H = H_0 + \sqrt{p^2 + M_0^2}$ が，厳密には正しくないことを意味する。

$H$ に関する上記の結果より，

$$\dot{q} = -i[q, H] = \frac{p}{\sqrt{p^2 + M^2(N_k)}} \tag{6.69}$$

がわかる。

さて，(6.64) と (6.69) により推進生成子のダイナミカルマップが

$$K = -\frac{1}{2}(qH + Hq) \tag{6.70}$$

と決まる。これは逆に解けて：

$$q = -\frac{1}{2}(KH^{-1} + H^{-1}K) \tag{6.71}$$

となる。

関係 (6.69) より

$$p = \frac{M\dot{q}}{\sqrt{1-\dot{q}^2}} \tag{6.72}$$

を得る。これは，$\dot{q}$ が Lorentz 推進の下では速度として作用することを示している。

さて，(6.55) で導入された一般化された座標は簡単に見つかる。$\dot{q}$ が推進速度なので，

$$X(x-q,t,p) = \frac{1}{2}\left[(x-q)\frac{1}{\sqrt{1-\dot{q}^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\dot{q}^2}}(x-q)\right] \tag{6.73}$$

となるはずである（この一般化された座標のより厳密な導出は，[11, 12, 1] を見よ）。なお，(6.73) のように対称化したので，$X$ は Hermite となっている。

スカラー場の一般化された時間座標 $T(x-q,t,p)$ は，変換 $(x,t) \to (X,T)$ がダランベルシアン（Dalembertian）不変性を保つ：

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 = \partial_T^2 - \partial_X^2 \tag{6.74}$$

という要請と，$T(x,t:0) = t$ なる要請により決まる。これらの要請により，

$$T(x-q,t,p) = (1-\dot{q}^2)^{1/2}t - \frac{1}{2}\dot{q}[(x-q)\frac{1}{(1-\dot{q}^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1-\dot{q}^2)^{1/2}}(x-q)] \tag{6.75}$$

を得る。

量子力学の発展の歴史において，$\sqrt{p^2 + M_0^2}$ の形のハミルトニアンを量子化しようという試みがいくつかあった。しかしながら，これらの試みはいずれも成功せず，Dirac が有名な相対論的波動方程式を提唱することとなり場の量子論への道を開いたのである。相対論的波動方程式の枠組みにおいて，Newton と

Wigner は相対論的物体の位置を表わす演算子を導入した [13, 14]。さて，場の量子論から出発し，$\sqrt{P^2+M^2}$ の形のハミルトニアンと量子力学的演算子 $q$ で記述される巨視的物体を得た。特筆すべきこと [11, 15] は，$q$ **に関する (6.71) の表式が，Newton-Wigner の位置演算子と完全に一致していることである。**

巨視的物体が $n$ 個あるときは，$n$ 組の演算子が存在する：$(q_i, p_i)$. この場合，

$$\langle 0(f)|H|0(f)\rangle = \sum_i H_i \tag{6.76}$$

$$P = \sum_i \vec{p}_i \tag{6.77}$$

$$\langle 0(f)|K|0(f)\rangle = \sum_i K_i \tag{6.78}$$

となる。ただし，$H_i = \sqrt{p_i^2 + M_0^2}$ であり，$\vec{K}_i$ は (6.70) と同様の表式で与えられる：

$$K_i = -\frac{1}{2}(q_i H_i + H_i q_i) \tag{6.79}$$

これは，元のラグランジアンが一つの Poincaré 対称性しかもたない系に，$n$ 重 Poincaré 対称性が生まれることを示している。

### 6.2.2 3 次元モデル

前の小節の相対論的 (1+1) 次元巨視的物体に関する考察は，相対論的 (1+3) 次元巨視的物体へ拡張できる。この拡張には複雑で長い考察が必要なので，ここでは主な結果を並べるだけにとどめる。詳しくは [15] を参照していただきたい。この部分は本書の他の部分とあまり関係がないので，読者はこの小節を飛ばしてもよい。

3 次元空間中の相対論的モデルにおける一つの物体を考えよう。添え字は空間ベクトルの成分を表わす：たとえば，$i = 1, 2, 3$.

Poincaré 代数の代数的関係で重要な部分は，

$$i[K_i, P_j] = H\delta_{ij} \tag{6.80}$$

$$i[K_i, H] = P_i \tag{6.81}$$

$$i[K_i, K_j] = \epsilon_{ijk} L_k \tag{6.82}$$

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k \tag{6.83}$$

である。ただし，$H$，$\vec{P}$，$\vec{K}$，$\vec{L}$ は，それぞれ，ハミルトニアン，運動量，推進演算子，角運動量を表わす。

これらの演算子のダイナミカルマップを列挙しておく：

$$H = [p^2 + M^2]^{1/2} \tag{6.84}$$

$$\vec{P} = \vec{p} \tag{6.85}$$

$$\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p} + \vec{l} \tag{6.86}$$

$$\vec{K} = -\frac{1}{2}(H\vec{q} + \vec{q}H) - \frac{\vec{p} \times \vec{l}}{H + M} \tag{6.87}$$

ただし，$M$ は (6.66) の構造をもつ：

$$M = M_0 + H_0 \tag{6.88}$$

なお，$M_0$ は巨視的物体の質量であり，$H_0$ は準粒子の自由ハミルトニアンである：

$$H_0 = \int dk\, \omega_k \alpha_k^\dagger \alpha_k. \tag{6.89}$$

(6.40) で示したように，$\vec{l}$ は準粒子の角運動量への寄与である。

量子力学的座標 $\vec{q}$ はこれらの演算子によって，

$$\vec{q} = -\frac{1}{2}\left(H^{-1}\vec{K} + \vec{K}H^{-1}\right) - \frac{\vec{p} \times \vec{l}}{H(H + M)} \tag{6.90}$$

と表わされる。これは，3 次元における Newton-Wigner 位置演算子である。物体が球対称でなく元の対称性を破る場合は，$\vec{l}$ を $\vec{l} + \vec{s}$ で置き換える必要がある。ただし 6.1.5 節で説明したように，$\vec{s}$ は零エネルギー・スピン演算子である。

ツリー近似での一般化された座標は

$$X_i(x - q, t, p) = \eta_{ij}(p)(x - q)_j \tag{6.91}$$

で与えられる（[1] の 432 頁を見よ）。ただし，

$$\eta_{ij}(p) = \delta_{ij} + \frac{p_i p_j}{M(H + M)} \tag{6.92}$$

である。一般化された時間座標は

$$T(x - q, t, p) = \frac{H}{M}t - \frac{1}{M}\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{\xi}) \tag{6.93}$$

で与えられる。ただし，

$$\vec{\xi} = \vec{q} - \frac{\vec{p} \times \vec{l}}{M(H + M)} + \frac{i}{2}\vec{p}H^{-2} \tag{6.94}$$

である。

### 6.2.3 フェルミオンの存在する巨視的物体

Klein - Gordon 型の方程式を調べることにより，スカラー場の一般化座標を決定した。そこでは，c 数 $(\vec{x},t)$ の時空変換がある q 数変換によって誘起されるように一般化座標を決定した。しかしスピノール（spinor）場が巨視的物体と相互作用している場合，Dirac 場の Heisenberg 演算子のダイナミカルマップも同じ一般化された座標によって書けることを証明する必要がある（[16] を見よ）。

$\Gamma_\mu$ を

$$\gamma_\mu \partial^\mu = \Gamma_\mu D^\mu \tag{6.95}$$

によって定義しよう。ただし，$D^\mu$ は $(\vec{X},T)$ に関連した微分ベクトルで，$\gamma_\mu$ は Dirac 行列である。以下で，$H$ と $\vec{p}$ により構成され，$\Gamma_\mu$ が

$$\Gamma_\mu = A\gamma_\mu A^{-1} \tag{6.96}$$

で与えられる Hermite 演算子が存在することを示す。

これは，**スピノールの Heisenberg 場** $\Psi$ **が**

$$\Psi(\vec{x},t) = A\Phi[\vec{X},T] \tag{6.97}$$

**の形である**ことを意味する。ただし，$\Phi$ は，$\vec{X}$ と $T$ の 4 成分・列関数（各成分はスカラー場）である。$\Psi$ のスピノール変換は，スピノールとして変換する演算子 $A$ によってなされる。この議論は，Lorentz 群の多スピノール表現を用いて，任意スピンの量子場に一般化できる。

以下で (1+1) 次元系を例にして，スピノール演算子 $A$ を調べる。この状況は，たとえば，ポリアセチレン（polyacetylene）で現われる [17, 18, 19, 20]。

(1+1) 次元では，Dirac 行列は 2 行 2 列である。一般化された座標 $(X,T)$ は，小節 6.2.1 の (6.73) と (6.75) で与えられた。一般化された座標に関するこれらの結果を利用すると，(6.96) を代入した (6.95) は，

$$A = \frac{1}{\sqrt{2M(H+M)}}[H + M + \gamma_5 p] \tag{6.98}$$

と解ける。ただし，$\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1$ である。

さて，電子場のダイナミカルマップは (6.97) によって次の形になる：

$$\Psi(x,t) = A\Phi(X,T). \tag{6.99}$$

(6.98) 中のスピノール演算子 $A$ は，

$$A = \frac{\sqrt{P_+} + \sqrt{P_-}}{2\sqrt{M}} + \gamma_5 \frac{\sqrt{P_+} - \sqrt{P_-}}{2\sqrt{M}} \tag{6.100}$$

と書くことができる。ただし，$P_\pm = H \pm p$ である。ここで，

$$(\sqrt{P_+} + \sqrt{P_-})^2 = 2(H + M) \tag{6.101}$$

$$(\sqrt{P_+} - \sqrt{P_-})^2 = 2p \tag{6.102}$$

の関係を利用した。

$A$ がスピノールとして変換することは，

$$[A, H] = [A, p] = 0 \tag{6.103}$$

$$[A, K] = \frac{i}{2}\gamma_5 A \tag{6.104}$$

の関係から見てとれる。

興味深いモデルとして，フェルミオン場とボソン場がソリトンと相互作用して，質量のないフェルミオン準粒子が現われるものがいくつかある [21, 22, 23, 24]。これらのモデルに現われる質量のないフェルミオンは，ソリトンのため破れた超対称性に関連したゴールドスティノ（Goldstino）である。ゴールドスティノは，NG フェルミオンである。

フェルミオン的零エネルギー・モードの存在するモデルを仮定する。その消滅演算子を $\alpha$ と記す：

$$[\alpha, \alpha^\dagger]_+ = 1 \tag{6.105}$$

$$[\alpha, H] = [\alpha, P] = [\alpha, K] = 0. \tag{6.106}$$

ただし，添え字 + つきのかぎ括弧は反交換関係を表わす。「$\alpha$ は零エネルギー演算子であるため自由ハミルトニアン $H_0$ への寄与がないので $H$ と可換である」という事実を，これらの関係を導出する際考慮した。質量のない粒子の速度は，推進の影響を受けない。したがって，$\alpha$ は $K$ と可換である。いかなる粒子演算子も $P$ に寄与しないので，$P$ と可換である。

さて，演算子

$$S = \sqrt{2M} A\gamma_0 s\alpha, \quad \bar{S} = \sqrt{2M} s^\dagger \gamma_0 A \gamma_0 \alpha^\dagger \tag{6.107}$$

を導入しよう。ただし，$s$ は 2 成分 c 数スピノールで，

$$s = -i\gamma_1 s^*, \quad s_i s_j^\dagger = \frac{1}{2}(1 - i\gamma_1)_{ij} \tag{6.108}$$

を満たす。表現

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{6.109}$$

を利用すると，

$$s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.110}$$

と

$$\frac{1}{2}(1 - i\gamma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.111}$$

を得る。

その結果，

$$[S, p_\mu] = 0, \quad [S, K] = -\frac{i}{2}\gamma_5 S \tag{6.112}$$

$$[S, \bar{S}]_+ = \gamma^\mu p_\mu - i\gamma_5 M \tag{6.113}$$

が導き出せる。ただし，$p_\mu = (H, p)$ である。ここで，

$$MA\gamma_0(1 - i\gamma_1)\gamma_0 A\gamma_0 = \gamma^\mu p_\mu - i\gamma_5 M \tag{6.114}$$

の関係を用いた。

これにより，演算子 $S$ と $\bar{S}$ は，中心電荷（central charge）がソリトン質量 $M$ で与えられる超対称性の代数を満たしていることがわかる。

この超対称性の出現 [25] は，元のラグランジアンの構造を見ただけではその対称性の存在が明らかでないところに特徴がある。これは突発的対称性のもう一つの実例である。Jackiw [21] により初めて発見された分数フェルミオン数が，これより導かれることも示されている。

(1+3) 次元系の場合は，$A$ は

$$A = \frac{1}{\sqrt{2M(H+M)}}[H + M + \gamma_0 \vec{\gamma}\vec{p}] \tag{6.115}$$

で定義される 4 行 4 列の行列であることが，[16] に示されている。

## 6.3　ツリー近似での量子ソリトン

### 6.3.1　安定なソリトン

この小節では，$(1+1)$ 次元空間の準静的物体を調べることにより，これまでの小節で示された一般的な考えを具体化する。この場合には，$x$ や $k$ はベクトルでなく実数スカラーと仮定する。議論をはっきりさせるため，sine-Gordon モデルに話をかぎる。したがって，Heisenberg 方程式は

$$-(\partial_t^2-\partial_x^2)\psi(x,t)=\frac{\mu^2}{\lambda}\sin\left[\lambda\psi(x,t)\right] \tag{6.116}$$

となる。この式は，相対論的に不変である。

Heisenberg 方程式 (6.7) の積分形は，

$$\psi=\varphi+f+(-\partial_t^2+\partial_x^2-m^2)^{-1}\left(\frac{\mu^2}{\lambda}\sin\left[\lambda\psi\right]-m^2\psi\right) \tag{6.117}$$

で与えられる。ただし，$m$ はくりこまれた質量である。$\varphi$ は，質量 $m$ の Klein-Gordon 方程式を満たす準粒子自由場である。この節ではすべてのループ補正を無視し，ツリー近似の範囲で調べる。この近似では $m=\mu$ である。

ボソン変換パラメータに対する (6.6) は，

$$(\partial_t^2-\partial_x^2+m^2)f=0 \tag{6.118}$$

である。

静的解は $f=\exp[\pm mx]$ であるが，これは $x=\pm\infty$ で発散しており，したがって $f$ の Fourier 変換はできない。

量子力学的効果は，$x$ を一般化された座標 $X$ で置き換えるところに現われている。このモデルは相対論的に不変なので，$X(x-q,t,p)$ は (6.73)：

$$X(x-q,t,p)=\frac{1}{2}\left[(x-q)\frac{1}{\sqrt{1-\dot{q}^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\dot{q}^2}}(x-q)\right] \tag{6.119}$$

で与えられる。

これより，1 ソリトンの場合の $f$ は

$$f(x,t)=f[X]=\exp[mX] \tag{6.120}$$

で与えられる。便宜上，正符号を採用した。

(6.117) の両辺の真空期待値をとると,

$$\phi(x,t) = f[X(x-q,t:\dot{q})] \\ +(-\partial_t^2+\partial_x^2-m^2)^{-1}\left(\frac{\mu^2}{\lambda}\sin\lambda\phi(x,t)-m^2\phi(x,t)\right) \quad (6.121)$$

を得る。これは

$$\phi(x,t) = 4\tan^{-1} f[X] \quad (6.122)$$

となり [26], sine-Gordon 方程式のキンク解としてよく知られている。$f$ では不可能であったが, この $\phi$ は Fourier 変換可能である。

ハミルトニアン $H$, 推進生成子 $K$, 運動量演算子は, $(1+1)$ 次元 Poincaré 代数をなしている [12]。前節の一般論通りに, $H=\sqrt{p^2+M^2}$ を得る。ただし, $M=M_0+H_0$ である。(6.70) によって

$$K = -\frac{1}{2}(qH+Hq) \quad (6.123)$$

も得られる。

多数のソリトンがある場合には, $f(x,t)$ は $f[X_i]$ の和である。ただし, $X_i = X(x-q_i,t,p_i:\theta_i)$ とおいた。Poincaré 群の生成子 $(H_i,K_i,p_i)$ は個々のソリトンに関連しており, 異なるソリトンの生成子は互いに可換である。

2 ソリトンに対しては, 場の秩序パラメータに関する古典的方程式は, (6.121) 中の $f[X]$ を $f[X_1]+f[X_2]$ で置き換えたものである。その解は,

$$\phi(x,t) = 4\tan^{-1}\left|\frac{f(X_1)+f(X_2)}{1-af(X_1)f(X_2)}\right| \quad (6.124)$$

である [12]。ただし,

$$a = \tanh^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2} \quad (6.125)$$

である。$\theta_i$ は $\dot{q}_i = \tanh\theta_i$ で与えられる。

別種の解も存在する。本書の筋書きに従った, いわゆるブリーザ (breather) 解の解析が [27] にある。

### 6.3.2 不安定ソリトン

$(1+1)$ 次元モデルが安定なソリトン解を許すとき, 古典方程式を可積分であるという。以前に議論した sine-Gordon 方程式はその一例である。ソリトンの

実例で物性物理において重要でよく知られたものに，ポリアセチレン中のソリトンがある。

ところで，ほとんどの可積分方程式は，量子場の Heisenberg 方程式をツリー近似して得られる。ループ補正を加えると，古典方程式は非可積分となってしまう。有限温度や不純物の効果を考慮しても可積分性は崩れる。可積分性を破壊する原因は他にも多くある。

たとえば，ポリアセチレンに対する SSH モデル [17, 18, 19] は，格子定数 $a$ の格子構造をもっている。$a$ を零にする極限で，TLM モデル [20] と呼ばれる連続モデルになる。TLM モデルは，可積分，したがって静的ソリトンを解にもつ方程式で表わされる。SSH ラグランジアンを $a$ のべきで次数 $a^2$ まで展開すると音響フォノンとの相互作用が現われ，得られる方程式は非可積分となる。この音響フォノン相互作用を適切に扱うと，ソリトンの速度はフォノン速度の大きさ程度時間的に変動していることがわかる [28]。SSH モデルの注意深い数値的解析が [29] に報告されている。結果をみると，ごく初期の短時間の間では，ソリトンは音響フォノン速度程度の速度で動いているが，まもなくそのすそが振動し広がり始めて，ついにはソリトンは死に絶えてしまう。

Josephson 接合に沿ったソリトンに対する熱の影響が，Scott とその同僚によって調べられた [30, 31]。

## 6.4 トポロジカルな物体と高次元

### 6.4.1 経路に依存したトポロジー

この章では，準粒子の凝縮によってつくられる巨視的物体を調べてきた。準粒子の凝縮は，準粒子場のボソン変換を通じて表現される。小節 6.3 で議論した 1 次元空間のソリトンは，ボソン変換関数 $f$ の特異性のため $f$ の Fourier 変換が存在しない場合の一例である。そこでの特異性は，$f$ を $x=\infty$ か $x=-\infty$ で指数関数的に発散させる種類のものであった。(6.122) で示したように，その秩序パラメータが $f$ の汎関数として多価である（任意の整数 $n$ における $f \to f+2\pi n$ に対して，$\phi$ は同じ値をとる）ので，この物体はトポロジカルな物体である。

1 次元空間中では，経路に依存するトポロジーは作れない。しかし 1 次元より大きい次元では，経路にあからさまに依存する関数が存在する。これらは $\vec{x}$ の関数として多価であり，空間的トポロジーといわれる。ある線のまわりの円

柱座標角度はその一例である。この線を線特異性と呼ぶ。トポロジー的特異性が存在すると Fourier 変換が不可能になる。ボソン変換関数 $f$ が空間的トポロジーに特異性をもつとき，巨視的物体は空間におけるトポロジー的物体といわれる [7, 1]。

直感的に明らかであるように，トポロジー的に特異な領域では，ある $(i, j)$ に対して

$$[\nabla_i, \nabla_j]f \neq 0 \tag{6.126}$$

が成り立つ。

原点を通り第 3 軸に沿った直線のまわりの円柱座標角度 $\theta$ の場合，

$$\nabla^2\theta = 0 \tag{6.127}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\theta = 2\pi\vec{e}_3\delta(x_1)\delta(x_2) \tag{6.128}$$

を得る。ただし，$\vec{e}_3$ は第 3 軸方向の単位ベクトルである。

この考察を空間と時間に拡張して，トポロジー的物体を条件

$$[\partial_\mu, \partial_\nu]f \neq 0 \tag{6.129}$$

（ある $(\mu, \nu)$ に対して）によって幾何学的に定義する。

「凝縮によって幾何学的トポロジーをもつ物体を作るボソンは，エネルギーに飛びがない」という重要な定理がある。これは秩序状態と幾何学的トポロジーをもつ物体とが密接に関係していることを示している。いかなる秩序もエネルギーに飛びのないなんらかの NG ボソンによって維持される。したがって，これらの NG ボソンの凝縮によって，幾何学的トポロジーをもつ物体が作られる。幾何学的に特異な領域で秩序が破壊されるので，これらの物体は欠陥と呼ばれる。したがって，ほとんどすべての秩序状態になんらかの欠陥が存在することは当然なことである。欠陥の性質は，秩序状態によって自発的に破れた元の対称性で決まる。

**本章では量子力学的演算子は無視する。前節の考察に従ってこれらは導入できる。**

### 6.4.2　超流動渦糸

5.2 節で考察した，超流動に対する相対論的スカラー・モデルを利用した簡単な例から始めよう。そこでは，スカラー Heisenberg 場 $\psi(x)$ の位相変換に関

連した位相対称性が自発的に破れる。NG ボソン場 $\chi(x)$ は質量がないので，

$$\partial^2\chi = 0 \tag{6.130}$$

である。

Nöther 流のダイナミカルマップは小節 5.2.6 で与えられた：

$$N_\mu(x) = c\partial_\mu\chi(x) + \cdots. \tag{6.131}$$

ただし，c 数定数 $c$ は，ボソン変換

$$\chi \to \chi + cn\theta \tag{6.132}$$

が Heisenberg 場 $\psi$ の位相を位相因子 $\exp[in\theta]$ だけ変化させるものである。後で便利なように，パラメータ $\theta$ を $n\theta$（$n$ は整数）で置き換えた。

(6.127) と (6.128) 中の円柱座標角度を，このボソン変換の $\theta$ として採用できるか吟味してみよう。

第一に，静的な $f$ では，自由場方程式 (6.130) は Laplace 方程式 (6.127) となる。これは，円柱座標角度が $f$ の自由場方程式を満たしていることを意味する。

第二に，秩序パラメータと他のあらゆる観測量は必ず一価である。秩序パラメータ $\phi = \langle 0(f)|\psi|0(f)\rangle$ の位相因子は $\exp[in\theta]$ であり，$\theta \to \theta + 2\pi$ に関して同一の値をもつ。つまり，秩序パラメータの値は一価である。こうして，$\theta$ を円柱座標角度ととれることがわかる。

このボソン変換によって，$N_i$ は

$$N_i = \frac{1}{c}\nabla_i\chi + n\nabla_i\theta \tag{6.133}$$

と変化する。ただし，(6.131) 中の点々は無視した。

これによって，巨視的流れ $J_i = \langle 0(f)|N_i|0(f)\rangle$ は以下のように作られる：

$$J_i(x) = n\nabla_i\theta = n\frac{1}{r}\vec{e}_i, \quad i = 1, 2. \tag{6.134}$$

ただし，$\vec{e}_i$ は $i$ 番目の方向の単位ベクトルである。これがよく知られた超流動渦糸である。トポロジー的特異性が第 3 軸に乗っているので，$J_3 = 0$ を得る。

以上の結果より，

$$\oint d\vec{s}\cdot\vec{J} = 2\pi n \tag{6.135}$$

となる。この場合，円周に沿った積分は第3軸のまわりになされ，いわゆる超流動渦糸の量子化が得られる。

この関係は表面積分

$$N_T = \int_S dS\vec{e}_3 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{J}) = 2\pi n \tag{6.136}$$

の形に変形できる。ただし，$S$ は (6.135) の線積分周回路に張った面領域である。

$N_T$ はトポロジー的電荷（topological charge）と称され，必ず量子化されており**巨視的量子数**と呼ばれる。

前章で，多くの秩序状態が巨視的量子状態であることを知った。いま，いくつかの量子数が巨視的でもあることを見た。こうなるとミクロとマクロの違いは，ほんの小さなものとなった。

ここで，重要事項をいくつか列記しておく。位相秩序状態は，Abel 的 (Abelian) 位相変換に関連した対称性が自発的に破れた結果である。NG ボソンの凝縮により，それ自身も Abel 的対称性の現われである渦巻きが生まれる（円柱座標角度は Abel 群を形成する回転パラメータである)。こうして特筆すべきメカニズムに行き着いた；ある対称性が自発的に破れた結果として現われる秩序状態中の欠陥は，秩序を壊し，座標空間中に元の対称性を出現させる。

もう一つの重要事項は以下のものである。物性物理では,「流れはいたるところで明白に定義されていなければならない」という物理的要請がある。これは，直観的にもわかるように回転流の中心が無意味なので，トポロジー的特異点である中心では渦流は消えなければならないことを意味する。上記のモデルでは，流れは中心で消えない；中心で発散している。これはモデルが相対論的なためである。物性物理における超流動モデルは相対論的ではなく，渦流には中心で流れを消すための構造因子が含まれる。このことは，次節で超伝導を調べるとわかる。

渦巻の自由エネルギーへの寄与は $n^2$ に比例するので小さい $n$ の方が得であり，物性物理では最小のトポロジー的電荷 $n = 1$ がしばしば優位である。

### 6.4.3 超伝導渦糸

超伝導流の考察は，前の小節での超流動渦糸に用いられたものと同じ段階を踏んで行われる。小節 5.3.2 で議論した BCS モデルを用いる。

(5.115) に示したように，電流のダイナミカルマップは

$$\vec{j} = \frac{1}{4\pi\lambda_L^2} c(\nabla^2)[\vec{a} - \frac{1}{e}\eta^{-1}(\nabla^2)\vec{\nabla}\chi] + \cdots \tag{6.137}$$

の形をもつ。ただし，

$$c(0) = 1 \tag{6.138}$$

とする。定数 $\lambda_L$ は **London 侵入距離**と呼ばれる。(6.137) 中の $c(\nabla^2)$ は Meissner 流の構造因子であり，ボソン特性関数と呼ばれる。

一方，小節 5.3.4 での考察で，電子 Heisenberg 場 $\psi_{\uparrow,\downarrow}$ は位相因子 exp $[i(1/\eta(\nabla^2))\chi]$ をもつことがわかった。ただし，$\chi$ は NG ボソンである。

結局，電子位相因子 $\exp[i(n/2)\theta]$ は

$$\chi(x) \to \chi(x) + n\frac{1}{2}\eta(\nabla^2)\theta \tag{6.139}$$

（$n$ は整数）によって生成される。

ここで，なぜ電子の位相変化として $\theta$ でなく $(1/2)\theta$ を考えたかを説明しておこう。秩序パラメータ $\phi$ は $\langle 0(f)|\psi_\uparrow\psi_\downarrow|0(f)\rangle$ で与えられるので，この位相の変化によって秩序パラメータには位相因子 $\exp[in\theta]$ が産み出される。さらに，電子場はフェルミオン場なので，いかなる観測量も電子場を偶数個含む。したがって，一価性の条件を課すのは電子場ではなく秩序パラメータの方である。これより，$\exp[in(1/2)\theta]$ ではなく $\exp[in\theta]$ が一価であるべきことが要請される。

高エネルギーのプラズマ縦成分を無視すると，$\chi$ は Laplace 方程式

$$\nabla^2\chi = 0 \tag{6.140}$$

を満たす。

Fourier 変換可能な Laplace 方程式 (6.140) の解は，運動量零の寄与しかしないことに注意せよ。前章で，Coulomb 相互作用により南部-Goldstone モードが，**運動量零を除いた**運動量全域でプラズマ・モードへと引き上げられることを見た。したがって，プラズマ準位だけが観測可能なボソン励起状態である；飛びのない励起状態（位相子（phason）準位）は Coulomb 効果のため観測量からはずされてしまう。これは Anderson-Higgs-Kibble メカニズムと呼ばれる。しかし，位相不変性によってその存在が要請されているので，Laplace 方程式 (6.140) を満たす位相場を無視するわけにはいかない。電子場の位相変換は $\chi$ の変位により生成されるが，それには NG 場の零運動量と零エネルギー部分が必要である。そのボソンは励起準位としては観測されないが，位相変換の代理人なのである。さらに，前の小節でみたように，Laplace 方程式のトポロジー的に特異な解は渦糸を生成し得るのである。

前の小節の考察に従って，上記ボソン変換での $\theta$ として第３軸まわりに関する円筒座標角度 $\theta$ を採用する。流れに関するダイナミカルマップ (6.137) をみると，このボソン変換により巨視的流れが生成されることがわかる [7, 1]。つまり，Maxwell 方程式は，古典的ベクトル・ポテンシャル $\vec{A}$ が誘起されることを要請するのである。Coulomb ゲージを採用しているので，これは横成分ベクトルである；$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$. ゲージ不変性により，ダイナミカルマップ (6.137)（点々で示された項も含めて）から生まれる巨視的流れは

$$\vec{J}=\frac{1}{4\pi\lambda_L^2}c(\nabla^2)[\vec{A}-n\frac{1}{2e}\vec{\nabla}\theta] \tag{6.141}$$

で与えられることがわかる。

円柱座標角度 $\theta$ は電子の位相であるが，$\theta$ は Fourier 変換可能でないので**これはゲージ関数ではない**。$\vec{\nabla}\theta$ は縦成分量に見えるかもしれないが，実際は $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\theta\neq 0$ より電磁場に寄与することがわかる。

(6.141) の第１項は Meissner 流である。これにより超伝導体は反磁性的になるのである。ベクトル・ポテンシャル $\vec{A}$ の横成分は Maxwell 方程式により決まる。静的な場合の Maxwell 方程式は

$$\nabla^2\vec{A}=-4\pi\vec{J} \tag{6.142}$$

である（この小節では Gauss 単位系を用いている）。

この方程式に (6.141) で与えられる流れを代入すると，

$$\nabla^2\vec{A}=-\frac{1}{\lambda_L^2}c(\nabla^2)[\vec{A}-n\frac{1}{2e}\vec{\nabla}\theta] \tag{6.143}$$

を得る。

この両辺に $(\vec{\nabla}\times)$ を作用させると，磁場 $\vec{H}$ に対する次の方程式を得る：

$$\nabla^2\vec{H}=\frac{1}{\lambda_L^2}c(\nabla^2)[\vec{H}-n\phi\vec{e}_3\delta(\vec{x})\,]. \tag{6.144}$$

ただし，(6.128) の関係を用いた。$\phi=(\pi/e)$ は単位流と呼ばれる定数である。$\vec{x}$ は $(x_1x_2)$ 平面内の２次元ベクトルである。

これより $\vec{H}(\vec{x}\,)=H(\vec{x}\,)\vec{e}_3$ が得られる。ただし，

$$H(\vec{x}\,)=\frac{n\phi}{\lambda_L^2}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{c(-k^2)}{k^2+c(-k^2)/\lambda_L^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{6.145}$$

である。なお，$c(-k^2)$ は $c(\nabla^2)$ の Fourier 変換である。

これを $(x_1x_2)$ 平面全体で積分すると，

$$\Phi = \int d^2xH(\vec{x}) = n\phi \tag{6.146}$$

を得る。これは $\phi$ の整数倍なので流れの量子化と呼ばれ，巨視的量子数のもう一つの実例である。$\phi$ が「単位流」と呼ばれるのは，この流れの量子化に基づいている。

流れの中に Meissner 項が存在するため渦流は短距離となる；Meissner 構造因子として近似的に $c(-k^2)=1$ を用いると，超流動流中の $1/r$ は $[\exp(-r/\lambda_L)]/r$ で置き換わる。$c(-k^2)$ は大きい $k$ に対して十分早く減衰し，そのため中心での渦流が消えるので，この構造因子は重要である（前の小節で議論した渦中心に対する要請を見よ）。

### 6.4.4 一般論

これまでの節で，一価でないボソン変換関数 $f$ によって生成される巨視的物体の例をいくつか見た。この小節では幾何学的トポロジーをもつ物体の一般論を簡単に示す。

トポロジー的に特異な $f$ を作るための系統的な手続きは，補助テンソル $G^\dagger_{\mu\nu} = [\partial_\mu, \partial_\nu]f$ の導入で始まる。明らかに $G^\dagger_{\mu\nu}(\vec{x},t)$ は，$f$ がトポロジー的に特異な領域でのみ定義される。経路に依存する $f$ が存在するためには $\partial f$ は一価でなければならない：$[\partial_\mu, \partial_\nu]\partial_\rho f = 0$.

トポロジー的に特異な $f$ にともなったボソン変換で生成される巨視的物体を，トポロジー的物体と呼ぶ。特異領域を線や閉じた面などに選ぶと，渦や袋（バッグ）などの形のトポロジー的物体が得られる。

準粒子の質量を $m$ とすると，方程式 (6.6) は

$$[-\partial^2 + m^2]f(\vec{x},t) = 0 \tag{6.147}$$

の形になる。ただし，$\partial^2 \equiv \partial^\mu\partial_\mu$. これより

$$\partial^\mu G^\dagger_{\mu\nu}(\vec{x},t) = [-\partial^2 + m^2]\partial_\nu f(\vec{x},t) \tag{6.148}$$

が得られる。

そこで，$\partial_\mu f$ と $G^\dagger_{\mu\nu}$ を Fourier 変換可能と仮定し，

$$\partial_\mu f = \frac{1}{-\partial^2 + m^2}\partial^\lambda G^\dagger_{\lambda\mu} \tag{6.149}$$

と書く。$G^{\dagger}_{\mu\nu}$ が反対称なので，これは $\partial^2 f = 0$ を意味し，その帰結として $m = 0$ となる。

こうして特筆すべき結果，**2次元以上の空間内のトポロジー的物体は，エネルギーに飛びのないボソンが凝縮することによってのみ生成される。**

$G^{\dagger}_{\mu\nu}$ が与えられると，$m = 0$ を代入した (6.149) から $\partial f$ が計算できる。これにより経路に依存した $f$ が決まる。逆にこれが $G^{\dagger}_{\mu\nu}$ を規定するが，これは元の $G^{\dagger}_{\mu\nu}$ と一致しなければならない。

これは $G^{\dagger}_{\mu\nu}$ に対する自己無撞着な条件である。$G^{\dagger}_{\mu\nu}$ の代わりにその対応物である

$$G^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}G^{\dagger}_{\lambda\rho} \tag{6.150}$$

から始めると，この条件は自動的に満たされる。ただし，$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ は $\epsilon^{0123} = 1$ を満たす完全反対称テンソルである。これは (6.148) とともに，ただちに連続の式 $\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0$ となる。上記の無撞着条件に必要なのはこの連続条件のみであることが示されている [1]。

このように**トポロジー的物体の研究はこの連続の式を解くことから始まり，**その解より (6.150) を利用して $G^{\dagger}_{\mu\nu}$ を得る；これにより今度は $\partial f$，したがって経路依存の $f$ が決定する。

たとえば，$f$ が，空間パラメータ $\sigma$ と時間パラメータ $\tau$ によって $y_\mu(\tau,\sigma)$ のようにパラメータ化された線に沿って，特異であるとしよう。$G^{\mu\nu}(x,t)$ の定義域はこの線上のみであるから，これは

$$G^{\mu\nu}(x,t) = c\int d\tau \int d\sigma \frac{\partial[y_\mu, y_\nu]}{\partial[\tau,\sigma]}\delta^{(4)}[x - y(\tau,\sigma)] \tag{6.151}$$

で与えられる。ただし，$c$ は定数で，ヤコビアン（Jacobian）$\partial[y_\mu, y_\nu]/\partial[\tau,\sigma]$ は

$$\frac{\partial[y_\mu, y_\nu]}{\partial[\tau,\sigma]} = \frac{\partial y_\mu}{\partial\tau}\frac{\partial y_\nu}{\partial\sigma} - \frac{\partial y_\mu}{\partial\sigma}\frac{\partial y_\nu}{\partial\tau} \tag{6.152}$$

で定義される。

$y_0$ を $\tau$ として選ぶと，この例題を簡単化できる：

$$y_0(\tau,\sigma) = \tau. \tag{6.153}$$

時刻 $\tau$ での線分の端の点を $\sigma_1(\tau)$，$\sigma_2(\tau)$ と記す。そうすると，

$$\partial_\mu G^{\mu\nu}(x) = c\int d\tau \frac{\partial y_\nu}{\partial\tau}\delta^{(4)}[x - y(\tau,\sigma)]\Big|^{\sigma_1(\tau)}_{\sigma_2(\tau)} \tag{6.154}$$

を得る。これは

$$\partial_\mu G^{\mu\nu}(x) = c\delta[\vec{x} - \vec{y}(t_x, \sigma_1(t_x))]\dot{y}_\nu(t_x, \sigma_1(t_x)) \\ -c\delta[\vec{x} - \vec{y}(t_x, \sigma_2(t_x))]\dot{y}_\nu(t_x, \sigma_2(t_x)) \tag{6.155}$$

となる。したがって，連続の式は，特異線が端点をもち得ないことを示しているのである。境界面自身がトポロジー的な面特異性をもつので，特異線の端点が系の境界面上にある場合，それは特異性の端点ではない。

定数 $c$ は

$$N_T = \frac{1}{2}\int_S dS^{\mu\nu} G^\dagger_{\mu\nu} \tag{6.156}$$

で定義されるトポロジー的電荷と関連している。トポロジー的電荷は線 $y$ に沿って保存する。この電荷の実例として，超流動渦の量子的束や超伝導渦流の磁束がある。線のまわりに閉じた円を作ると，すべての観測量は一価なので元の値に戻るはずである。この条件の特徴的な結果として，トポロジー的電荷の量子化が導かれるのである。

線 $y$ が直線の場合には，$f$ はこの直線のまわりの円柱座標角度に比例している。そのときは，この一般論は前の小節で考察したものになる。

### 6.4.5 欠陥と元の対称性

超伝導では位相場が Laplace 方程式を満たすので，$\chi \to \chi + f$ 中のボソン変換パラメータ $f$ もそれを満たす。前の小節でのトポロジー的物体の解析により，この変換がトポロジー的線（渦糸）の集まりを作ることがわかった。特異線のまわりの領域では秩序が乱れているので，これらの物体は超伝導体中の欠陥と呼ばれる。

上で述べたが，まっすぐな渦糸は $f = \theta$ によって作られる。ただし，$\theta$ は円柱座標角度である。$\exp[i\theta]$ 中の位相パラメータ $\theta$ と円柱座標角度 $\theta$ はともに Abel 的変換パラメータである。このことは特筆すべき現象を産み出す。超伝導状態は，位相対称性が自発的に破れるために生成された位相秩序状態である。この位相秩序は位相ボソンによって維持される。欠陥はこの位相ボソンの凝縮の結果生まれるもので，その空間的構造を通じて元の Abel 的対称性を呈する。

この現象は以下のように一般的にまとめられる。ある対称性が自発的に破れたために現われる秩序状態を考えよう。この秩序状態は NG ボソンによって維持される。このボソンの凝縮によってある欠陥が生まれるが，その時空構造を通じて元の対称性が再び顔を出すのである。

この節では，Abel 的秩序にともなう欠陥を主に調べた。これと同じ種類でよく知られたものに，結晶欠陥がある。結晶秩序は Abel 的な空間並進対称性が自発的に破れた結果現われるので，欠陥はトポロジー的特異線の物体である。結晶中には三つの NG ボソン（フォノン）があり，ベクトル量である。したがって，トポロジー的電荷も 3 成分ベクトルである。トポロジー的特異線である結晶の欠陥は格子欠陥と呼ばれ，そのトポロジー的電荷ベクトルは Burgers ベクトルである。Burgers ベクトルも量子化されている。結晶中の欠陥はすべて特異線の集まりである。点欠陥は閉じた線の集まりでできた小さな球状表面である。結晶中の点欠陥の系統的な解析が前の小節で与えられた方法論に基づいて多数行われ，点欠陥エネルギーの数値結果が実験と比較された [32]。

非 Abel 的対称性が自発的に破れてできた秩序状態でも，NG ボソンの凝縮によって巨視的物体が生成される。このような巨視的物体の一般論は，Abel 的なものの場合よりはるかに込み入っている。この種の方法論の説明は [1] にある。非 Abel 型は，モノポール（monopole）[33] のような特異点も含んだ多彩な巨視的物体を可能にする。時空に依存するトポロジー的物体を含むように議論を拡張すると，その多彩性はさらに増す。インスタントン（instanton）はよく知られた例である（たとえば，[2] を見よ）。

しかし，現実はさらに多様である。それは，小節 6.1.10 で議論した突発的対称性のためである。巨視的物体の創造は，その構造に依存した多彩な新しい秩序を生成し得る。たとえば，超伝導体の混合状態中で，渦糸は格子を組む。この渦糸格子の格子定数は，元のラグランジアンには現われていなかったパラメータである；このパラメータは動的に許される多くの中の特別な状態にのみ現われる（多ソリトン系でのソリトン速度を思い出してみよう；この速度パラメータの出現によって多重 Poincaré 対称性が生まれた）。このおかげで場の量子論の適用範囲が広がり，多彩な自然現象を記述できるのである。しかしながら，このために，出発点のラグランジアンが与えられてもすべての可能な状態を尽くすことがたいへん難しくなるのである。

興味深い場合として，トポロジー的物体が高密度に集まる問題がある。特異線が平行に並んでできた単純な非晶質（amorphous）物体は，比較的簡単な物体である。線に沿った Burgers ベクトルの保存性のため，このような物体を切るのは難しい。しかし，より乱雑な分布をした巨視的物体の解析には，複雑な方法が必要であろう。

これらの巨視的物体は秩序状態をゆがませるので，しばしば複雑にゆがんだ

幾何学を生成する。Papini は前の小節で示したトポロジー的物体に関する一般論に基づいて，ゆがんだ幾何学の導出を試みた [34]。

起源が量子的な巨視的物体の研究は始まったばかりで，豊富で複雑な主題であり，そのごく少しが見えてきたにすぎない。

## 6.5　体積は有限か無限か

### 6.5.1　二つの視点

自由度が無限大である場の量子論では奇妙な効果が多く見られることを知った。「いかなる物体の大きさも有限だから自由度は有限のはずだ」という読者もいるだろう。この主張は，観測される粒子と基礎的実在物が同一である古典原子論の立場では正しかったであろうが，場の量子論で記述される近代的な多体系ではそれはもはや真実ではない。有限体積であっても量子場の系では自由度は無限大なのである。

「それでも，多数の非同値 Fock 空間の出現は無限体積のためであり，物性物理で扱うほとんどの実例が有限の大きさである以上，多数の非同値空間は少なくとも物性物理では現実には現われないだろう」と感じるかもしれない。たしかに，非同値 Fock 空間の出現には，ふつう互いに無限個の粒子数だけ違った二つの状態ベクトルの存在が必要である。空間的に一様な系を考えると，粒子の凝縮が観測にかかるためには，その密度が有限でなければならない。そうすれば，体積が無限大なので全粒子数が無限大になる。この議論によると，多 Fock 空間の起源は無限大の体積にあるように思われるかもしれない。

しかしながら有限体積には境界があり，それが以上の議論の基礎的仮定であった空間並進対称性をつねに破っているので，この議論には欠陥がある。

有限の大きさの系に対する場合，ふつう二つの異なった視点がある。一つは，その大きさがすべての世界であると仮定して，この有限体積で場を量子化するというものである。この立場は，境界面が剛体面（外と内とを完全に分断する無限に高い斥力ポテンシャルとして働くもの）でないかぎり厳密には正しくないことは明らかである。そんな境界は現実的ではない。そう考えると，もう一つの見方，すなわち,「境界そのものも我々がかかわる無限体積の世界に属する系の一部分と考える」という見方に行き着く。この立場では，無限体積の世界で場を量子化し，Heisenberg 場に対する基礎方程式の解を探すのである。ただし，その解は，境界面を巨視的物体として自己無撞着に含んでいなければなら

ない。

二つの立場は明らかに違う。自己無撞着に生成された境界面は，その形が無限種類選べ，表面の振動が表面フォノン（surface phonon）を生み，表面スピンの振動が表面マグノンを生む，などというような多彩な自由度を有しているのである。これらの自由度も含めて，系は非同値 Fock 空間を生成するのに十分な自由度をもっているのである。

### 6.5.2 物性物理学

議論を明瞭にするために，有限サイズの超伝導体の系を考えよう。境界面から十分離れた領域の状況は，無限サイズ系の解によって近似的に記述できる。位相対称性が破れているので，電子のもっている電荷は常伝導状態のときとは異なっているようにみえる。もちろんそのような電荷の食い違いは許されない；食い違いの分は境界付近に凝集している。境界面に比較的近い領域の状況は，奥深い領域のところのものとは違う。境界付近の状態はしばしば常伝導相になるが，領域の内部に移動するに従ってしだいに超伝導相に移行する。

さらに，以前にも述べたように，境界面自身がフォノンやマグノン，その他の量子粒子を所持し得る。

境界自身も考えている系に属する物体の一部であるから，表面物理という研究対象も存在し得るのである。

ソリトンの場合に議論したように，巨視的物体としての境界面が量子粒子に作用する自己無撞着ポテンシャルを生成することもあり得る。

厳密にいうと，境界面の存在により前節で調べたような量子力学的演算子が出現する。しかし，これらの演算子を無視できるほどふつうは系が大きいのである。

### 6.5.3 核物理学と高エネルギー物理学

大きい原子核には同様の見方が適用できる。つまり，いくつかの核子が有限の領域（その中に核子を閉じ込める）を自己無撞着に生成する。境界面には，表面振動モードや表面回転モードなどが自然に生まれる。

さらに，境界を構成する物体は，自己無撞着ポテンシャルを生成し核子を閉じ込める。この表面を大まかに球面で近似すると，このポテンシャルは半径の関数となる。これを半径の次数で展開し２次より高次の項を無視すると，ポテンシャルは近似的に振動子ポテンシャルになる。このようにして，簡単な殻モ

デル（shell model）が得られる。現実的なモデルを得るには近似の改良が必要である。

巨視的物体がしばしば新しい対称性を生成することを見てきた。これらは突発的対称性と呼ばれた。非球面形は，回転モードや四重極モーメントを生む。これらの自由度によって Elliot 型の対称群が生成される。それは，一つの調和振動子，三つの回転生成子，対角和が零（traceless）の 2 階対称テンソルである四重極子演算子が五つで構成され，U(3) 代数を形成している [35]。そこではこの章で学んだ量子力学的演算子が重要な役割を演じるであろう。

こう考えてくると，有名な相互作用ボソン・モデル [36] を，場の量子論のモデルから導きだしてみたいという誘惑に駆られる [37, 38]。

重陽子のような軽い核子は，ふつう巨視的物体としてではなく合成粒子として扱われる。この単純な合成粒子像と巨視的物体に閉じこめられている核子が，どのように関連しているかは明らかではない。

同様の視点はよりミクロなレベルでも現われる。つまり，クォーク（quark）により構成されている粒子の問題；合成モデル，バッグ・モデル（bag model）など。

## 6.6　生物学的秩序

巨視的秩序を扱う一貫した一般論ができると，それを高次の秩序系に応用したくなる。自然と生物学的系の秩序に関心が向く。生物学的系では電子の影響が重要であろうことは容易に想像できる。Fröhlich はその先駆的な著書 [39] の中で，蛋白質分子の 1 次元鎖に沿って双極子の量子振動子を並べたモデルを提唱した。ソリトン波に対する同様のメカニズムは Davidov によって提唱された [40]。これらの双極子の量子モードは，ほとんどの生物学的物体に現われるようだし，実験家にとって刺激に満ちた研究である。これに沿った研究は，最近 Del Giudice，Vitiello とその同僚によって勢力的に進められた [41, 42]。

多くの生物学的物体の中で特に興味深いのは，脳である。いかなる理論であってもそれが脳の理論であると主張できるためには，記憶の生成・再生や意識のメカニズムのような魅惑的な属性を説明できなければならない。

長年の間，脳の機能は，神経系パルスの経路を提供している古典的ニューロン（neuron）系が制御するものと考えられてきた。これはしばしばニューロン学説と呼ばれている。しかし，このニューロン学説と矛盾すると思われる実験

データが次々とでてきた。多くの事実の中でもっとも本質的なものは，Pribram によって発見された記憶機能の非局在性がある。脳のこの問題や他の主題に関しては，Pribram 自身によって書かれた本を読むことを推奨する [43]。

量子論に基づいたモデルも多くあるが，そのほとんどはむしろ哲学的意味合いが強かった。Burns による論文 [44] には，意識という主題に関する詳しい文献リスト（量子論的モデルを含んだ）が載っている。量子系はミクロなところにしか顔を出さないという誤った認識が，この問題を少なからず混乱させた。これまでの節で見てきたように，巨視的な秩序状態の出現は量子的起源のものである。ほとんどの巨視的秩序状態が場の量子論の結果であることを念頭におくと，生物系における巨視的秩序状態も同様のメカニズムによって生成されると仮定するのがもっともであるように思える。「脳の記憶はなんらかの秩序状態に関連したある秩序の現われである」と考えるのがもっともである。したがって,「これらの秩序状態が，本書で説明してきた秩序状態のものと同じメカニズムによって制御されている」という仮定を吟味してみるのも価値があるだろう。

脳の秩序状態が本書で示された巨視的量子秩序状態であると仮定したら，ただちにどんな結果が得られるか考えてみよう [45, 46]。その結果,「ある種の外的刺激は，凝縮メカニズムを通じて，脳にある秩序パターンとして焼きつけられる」という直観的描像が得られる。この立場では，脳はある秩序状態に属する真空状態にあることになる。この種の秩序状態に属する真空は無数選択できるので，脳の記憶が非常に多彩であることも驚くに値しない。さらに，これらの記憶は，真空状態として存在するので，比較的安定である。

ここでの仮定からただちに得られる結果には，さらに注目するものがある。これらの秩序状態はエネルギーに飛びのない NG モードによって維持されるので，ほんの弱い外的刺激によっても容易に NG モードが励起される。これらの NG 励起によって，我々は，NG モードによって維持されている秩序に関連した記憶のあることを思い出すのである。NG 励起が消えるとすぐ，記憶の存在を意識しなくなる。このように，記憶の再生メカニズムは理論の直接の結果なのである。量子場の系に生成されたこれらの秩序は，非局所性をもっていることを学んだ。したがって，この種の理論はニューロン学説を指示せず，Pribram の結論と一致する。

この観点では，古典的ニューロン系は単に神経パルス伝播の経路の役割を担うだけで（信号の伝播には重要であろうが），記憶に関連した機能は神経系内外のより広い領域によって制御されていることになる。この領域は，はっきり

とした境界がなく広い。このような理論を推し進めるには，金属中の電子の役割をするなんらかの自由度が必要である。これらの自由度は皮質に存在するある種の量子場であるはずなので，皮質子（corticons）とでも呼べるものであろう [46]。金属中の光子のように振る舞うボソン自由度も必要である。

以上は，脳の系に巨視的な量子秩序状態という観点を採用した場合，脳の理論がいかなるものになるかというむしろ抽象的な記述である。これを真に科学的理論とするためには，皮質子とは何か，皮質子と相互作用するボソンとは何かを明らかにしなければならない。

最近，その意味で確かな脳の理論が [47] に示され，量子脳力学（quantum brain dynamics; QBD）と呼ばれている。この論文では，脳の構造に関する現在の知識に基づいて，上に述べた意味で厳密な理論を展開している。つまり，この理論では，微細な皮質繊維の3次元的網状組織が構成する細胞内外の領域を一括して考察している。これらの繊維には Frölich 型の双極子量子が存在する。これはまさに皮質子である。皮質子と相互作用するボソンとしては，水分子（水素結合によって，変形可能な擬結晶を形成している）にかかわるフォノンを仮定している。有限の値をもつ秩序パラメータとしては，個々の電気双極子が系統的に並んでできる電気双極子を採用する。この脳の秩序状態は，Del Giudice, Vitiello 等によって生物系一般に対して提唱されており，もっともなものである。この種の解析は，多くの生物学的現象に適用できる数学理論を生むであろうし，脳の理論としての検証を受けることになろう。

上で指摘したように，皮質繊維の網状組織構造が脳にかぎったものではなく，ほとんどの生物細胞に共通なものであることは，注目に値する。この構造を通じて，からだ全体が一丸となって強力な相関をもつ系を形作っているのであろう [47]。

## 参考文献

[1] H. Umezawa, H. Matsumoto, and M. Tachiki, *Thermo Field Dynamics and Condensed States*, (North-Holland, Amsterdam, 1982).

[2] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, (North Holland, Amsterdam, 1982).

[3] P. J. Caudrey, *Solitons*, (Springer Verlag, Berlin, 1980).

[4] N. J. Papastamatiou and H. Umezawa, In W. Rozmus and J. A. Tuszynski, editors, *Non Linear and Chaotic Phenomena in Plasma Solids and Fliuds-Proceeding of CAP-NSERC Summer Institute*, (World Scientific, Singapore,

1991) 97.

[5] R. Manka and G. Vitiello, *Ann. Phys.* **61** (1990) 199.

[6] H. Matsumoto, P. Sodano and H. Umezawa, *Phys. Rev.* **D19** (1979) 511.

[7] L. Leplae, H. Umezawa and F. Mancini, *Physics Reports* **10C** (1974) 153.

[8] H. Matsumoto, G. Oberlechner, M. Umezawa and H. Umezawa, *J. Math. Phys.* **20** (1979) 2088.

[9] G. Semenoff, H. Matsumoto and H. Umezawa, *Prog. Theor. Phys.* **67** (1982) 1619.

[10] J. L. Gervais, A. Jevicki and B. Sakita, *Phys. Rev.* **D12** (1975) 1038.

[11] H. Matsumoto, N. J. Papastamatiou, G. Semenoff and H. Umezawa, *Phys. Rev.* **D24** (1981) 406.

[12] H. Matsumoto, H. Umezawa and N. J. Papastamatiou, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 1434.

[13] T. D. Newton and E. P. Wigner, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 400.

[14] T. F. Jordan, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 2028.

[15] H. Yamanaka, H. Matsumoto and H. Umezawa, *Phys. Rev.* **D24** (1981) 2607.

[16] H. Matsumoto, G. Semenoff and H. Umezawa, *Prog. Theor. Phys.* **69** (1983) 1631.

[17] W. P Su, J. R. Schrieffer and A. J. Heeger, *Phys. Rev.* **B22** (1980) 2099.

[18] W. P Su, J. R. Schrieffer and A. J. Heeger, *Phys. Rev.* **B28** (1983) 1138.

[19] W. P Su, J. R. Schrieffer and A. J. Heeger, *Phys. Rev. Lett.* **46** (1981) 738.

[20] H. Takayama, Y. R. Lin-Liu and K. Maki, *Phys. Rev.* **B21** (1980) 2388.

[21] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev.* **D13** (1976) 3398.

[22] P. DeVecchia and S. Ferrara, *Nucl. Phys.* **B130** (1977) 93.

[23] N. S. Baaklini, *J. Phys.* **A11** (1978) 2083.

[24] P. Rossi, *Phys. Lett.* **71B** (1977) 45.

[25] G. Semenoff, H. Matsumoto and H. Umezawa, *Phys. Rev.* **D25** (1982) 1054.

[26] G. Oberlechner, M. Umezawa and Ch. Zenses, *Lett. Nuovo Cimento* **23** (1978) 641.

[27] N. J. Papastamatiou, H. Matsumoto and H. Umezawa, *Phys. Rev.* **D29** (1984) 2979.

[28] Y. Leblanc, H. Matsumoto, H. Umezawa and F. Mancini, *Phys. Rev.* **B30** (1984) 5958.

[29] A. R. Bishop, D. K. Campbell, P. S. Lomdahl, B. Horowitz and S. R. Phillpot, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 671.

[30] M. Salerno and A. C. Scott, *Phys. Rev.* **B26** (1982) 2474.

[31] M. Salerno, M. P. Soerensen, O. Skovgaard and P. L. Christiansen, *Wave Motion* **5** (1983) 49.

[32] U. Krause, J. P. Kuska and R. Wedell, Monovacancy formation energies in cubic crystals, *Preprint*, 1989.

[33] G. tHooft, *Nucl. Phys.* **B79** (1974) 276.

[34] G. Papini, In B. Kursunoglu, S. L. Mintz and A. Perlmutter, editors, *High Energy Physics*, (Plenum, New York, 1985).

[35] J. P. Elliot, *Proc. Roy. Soc.* **A245** (1958) 128.

[36] A. Arima and F. Iachello, *The Interacting boson Model*, (Cambridge Press, Cambridge, 1987).

[37] M. Mukerjee and Y. Nambu, *Ann. Phys.* **191** (1989) 143.

[38] X. Q. Zhu, F. C. Khanna and H. Umezawa, *Phys. Rev.* **C43** (1991) 2891.

[39] H. Fröhlich, *Intern. J. Quantum Chem.* **2** (1968) 641.

[40] A. S. Davidov, *Phys. Scripta* **20** (1979) 387.

[41] E. Del Giudice, G. Preparata and G. Vitiello, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 1085.

[42] E. Del Giudice, S. Doglia, M. Milani and G. Vitiello, *Nucl. Phys.* **B251** (1985) 375.

[43] K. H. Pribram, *Brain and Perception*, (Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, 1991).

[44] J. E. Burns, *The Journal of Mind and Behavior* **11** (1990) 153.

[45] L. M. Ricciardi and H. Umezawa, *Kybernetik* **4** (1967) 44.

[46] C. I. J. M. Stuart, Y. Takahashi and H. Umezawa, *J. Theor. Biol.* **71** (1978) 605.

[47] M. Jibu and K. Yasue, *"A Physical Picture of Umezawa's quantum brain dynamics"*, in Cybernetics and Systems Research 1992, ed. R. Trappl, World Science Publisher, p. 797.

# 7
# Thermo Field Dynamics (TFD)

## 7.1 はじめに

前章までで，自然界の呈する多彩な形態を記述する際に，場の量子論が発揮する魅力的な力をいくつか紹介してきた。その力の起源は，量子場の系がもつ無限個の自由度にある。この無限自由度のおかげで，非同値状態ベクトル空間の選択の可能性が無限個となっているのである。どの空間を選ぶかということは，真空中への粒子凝縮の形の相違から生じた無数の異なる真空の中から，どの真空を選ぶかに依存する。真空への粒子凝縮によって発現するこの属性は巨視的な属性といわれ，一方，励起状態の属性は微視的準粒子の状態と呼ばれる。このように，量子場の系は微視的属性と巨視的属性を兼ね備えているのである。さらに，粒子凝縮によって生成された巨視的物体は，量子力学的自由度をももっていることがわかった。こうして量子場の系は，量子場粒子，量子力学的自由度，古典的自由度を記述できることが明らかになった。

真空への粒子凝縮の形状がハミルトニアンのもつ対称性を破るとき，対称性は自発的に破れたといわれる。自発的対称性の破れを通して多彩な巨視的秩序が出現する。このとき，元のハミルトニアンがもつ不変性のために，ハミルトニアンの固有状態に非加算個の縮退が起こり，縮退した真空が出現するのである。これらの縮退した真空の存在が，NG モードとよばれるエネルギーに飛びのない量子モードの発生を可能にしているのである。

この場の量子論の力は，一つの系の多彩な相を記述する理論として歓迎すべきものであるが，この柔軟性のため唯一の解が得られないという意味で理論の弱点でもある。現実には，一つの系の各相は，温度や圧力などの熱力学的変数を調節して特定される。すると自然に,「場の理論の真空に付随した自由度の中に，熱的自由度として振る舞うものがあるのか？」と尋ねたくなる。通常の場の理論は力学的属性のみを記述するので，その真空には熱的自由度が付随し得ないことはほぼ明らかである；通常の場の量子論におけるハミルトニアン $H$ は力学的エネルギーを表わすが，熱エネルギーを与えることはない。この状況を改善するためには，ある種の熱的自由度の導入が必要なことは明白である。そこで，真空に熱的自由度を加えて場の量子論を拡張することにしよう。

2.5 節で行った考察がそのより所である。そこでは，2 モード・スクイーズド状態を議論する際に，場の量子論の体系がもつ二つの特色を利用した。一つは，2.5 節で説明したように，TFD メカニズムによって，2 モード・スクイーズド状態（熱的 Bogoliubov 変換で作られた状態）に熱的雑音が誘起されるという特色である。これは 3.2 節で場の量子論に拡張された。こうして，TFD のメカニズムとその Bogoliubov 変換は，純粋状態に熱的雑音を生成するのである。TFD のこの特色は今の目的に利用できる。この試みに利用できるもう一つの特色は，純粋状態である真空（TFD メカニズムによって生成された真空）でとった期待値と混合状態における統計力学的熱平均が同等であるというものである。このことは 2.4 節の (2.96) で示された。2 モード・スクイーズド状態の系では片方（非チルダの部分）の演算子の真空期待値は，統計力学における熱（あるいはアンサンブル）平均に等しい。この事実によって，本章で導入される熱現象を扱う量子論が統計力学と同等であることが証明されたことになる。この場の量子論は Thermo Field Dynamics (TFD) と呼ばれる。

これは最近発展してきた理論なので，統計力学がどの程度 TFD に受け継がれるかは今のところわからない。物理学の歴史にしばしば見られるように，壮大な構想の下に作られた新しい体系は新しい視点を開き，その視点に基づいて新しい物理学が形成されるのである。そこで，純粋状態による熱物理学建設の構想を追求するのも価値があると考えられる。

さらに，この量子場の体系はいくつかの長所をもつことが期待される。ふつう，統計力学は有限体積の系に対して定式化され，無限体積への移行は熱力学的極限で考慮される。一方，小節 6.5.1 で説明したように，場の量子論では無限体積の系が扱われ，有限体積の物体は自己無撞着に作られた境界面で囲まれ

たものとして扱われる。

考えられるもう一つの長所は，無限自由度の存在が孤立系の熱理論を可能にするだろうという点である。従来の熱力学では，考えている系に接触している熱浴によって熱の制御が行われる。熱浴は考えている系からの反作用で攪乱されてはならないので，無限の自由度をもつことが要求される。無限自由度をもつ場の量子論では，熱浴をも含めて全系を孤立系として扱うことができる。ここでの考察には，系を孤立系，閉じた系，開放系と分類する熱力学の用語を借用している。孤立系は外界と一切隔絶されている。閉じた系では外界との間にエネルギー（熱も含む）のやりとりのみが許され，一方，開放系ではエネルギーと粒子のやりとりが許される。つまり，開放系には熱浴と粒子溜が接続し，閉じた系には熱浴のみが接触している。

前の段落で示唆した孤立系に対する量子場の体系は，その自由度が無数にあるので閉じた系や開放系にかかわるなんらかの特徴をももっている。場の量子論におけるいかなる観測も，孤立系の一部分である有限領域で行われる。その観測領域の外には無限の自由度があり，熱浴や粒子溜として作用することができる。後の章でわかるように，熱平衡状態では，真空状態は安定であるが励起状態（すなわち，準粒子状態）は散逸を許す。TFD のこの特徴は，熱的自由度を含まない通常の場の量子論にはないきわだったものである；通常の場の量子論では真空に加えて準粒子も安定である。

孤立量子場系にも適用可能な TFD の観点は，いくつかの物理的理由で特に有用である。第一の理由は宇宙進化の物理学にある。宇宙は普通，力学的効果と熱的効果によって進化してきたと考えられている。現代物理によると，自然の基本的要素は，クォーク，レプトン，ゲージ場，重力場などの量子場である。これらの量子場は，力学的発展を制御しているものと考えられる。進化には熱的効果も含まれているので，熱的自由度をもった場の量子論が必要となる。この熱的問題における重要な点は，宇宙が孤立系であるという点にある。そのために，孤立系に対する熱現象を扱う場の量子論が必要なのである。

第二の理由は，核物理学の問題にある。そこでは，温度の概念が通常使われている。明らかに核反応は孤立系の現象である。

孤立系物理学のいくつかの領域（宇宙や核反応など）で熱の影響が不可欠であるという事実に気づけば，場の量子論にとって熱的自由度が本質的な役割を果たすという観点をとらざるを得ない。本書でこの視点を追求する。

すると,「この熱現象を扱う場の理論が，孤立系で起こる他の現象にも適用

できるはずだ」と期待するのももっともに思える。このため，多くの高エネルギー物理学者は，孤立系で起きる高エネルギー粒子反応において高温度中間状態が短時間現われると予想している。つまり，高エネルギー粒子反応を調べれば,「クォーク物理学のような基礎的レベルでの孤立系の現象においても，熱の影響が現われるか否か」という疑問に答えることができる。この点を確かめるためには，実験と比較できるなんらかの理論的結果が必要である。そのために，熱現象を扱う場の量子論を練り上げる努力をしているのである。高エネルギー粒子反応における熱の影響を調べるために，多くの努力が物理学者によって払われてきた。これまでになされたほとんどの計算は，平衡状態での自己エネルギーや自由エネルギーにかぎられている。そこには，熱的中間状態は近似的に平衡状態とみなせるだろうという期待がある。しかし，粒子反応を調べようとすると遷移行列の計算が必要となる。したがって，遷移行列の計算において熱の影響も取り入れられる理論の建設が要請される。そのような理論はまだ確立されていない。

「高エネルギー粒子反応への統計力学の適用は，熱の効果を取り入れるというよりは，多くの未知パラメータに関する平均操作の必要性から生まれた」ということもできる。この意見は，上に述べた熱の影響に関する基本的な観点とさほど異なっているわけではない。それは，TFD が 2.4 節の (2.96) に基礎をおいているからである。その関係式は，2 モード系における演算子（一方のモード，すなわち非チルダ部分のみに依存する演算子）の真空期待値と，統計力学における熱（あるいは，アンサンブル）平均が同等であることを意味している。結局，双方の観点が要求しているのは,「基本的量子場が制御している現象における，熱の影響を調べなければならない」ということである。

誤解のないように注意しておく。TFD は孤立系の現象に適用できるわけであるが，閉じた系や開放系でも有効なはずである。熱平衡状態に対する TFD は，閉じた系に対する理論の一例である。

## 7.2 TFD ユニタリ表現での自由場

### 7.2.1 熱的二重項とハミルトニアン

2.4 節の (2.96) 式（アンサンブル平均を真空期待値で置き換えたもの）を参照しながら，3.2 節で扱った 2 モード・スクイーズド状態を TFD で定式化することから始める。自由場についてまとめておこう。

2 種類の可換な振動子：

$$[a_k, a_l^\dagger] = [\tilde{a}_k, \tilde{a}_l^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{l}) \tag{7.1}$$

$$[a_k, \tilde{a}_l] = [a_k, \tilde{a}_l^\dagger] = 0 \tag{7.2}$$

で書かれている生成子を考える。

系の温度が零でないかぎり，$a_k$ と $\tilde{a}_k$ はケット真空を消去しないので，消滅演算子ではない：

$$a_k|0(\theta)\rangle \neq 0, \quad \tilde{a}_k|0(\theta)\rangle \neq 0 \tag{7.3}$$

$$\langle 0(\theta)|a_k^\dagger \neq 0, \quad \langle 0(\theta)|\tilde{a}_k^\dagger \neq 0. \tag{7.4}$$

ただし，$|0(\theta)\rangle$ と $\langle 0(\theta)|$ は考えている系の真空である。消滅演算子を決めるための真空がパラメータ $\theta$ に依存しているので，消滅演算子を $\xi_k(\theta)$，$\tilde{\xi}_k(\theta)$ と記す：

$$\xi_k(\theta)|0(\theta)\rangle = \tilde{\xi}_k(\theta)|0(\theta)\rangle = 0 \tag{7.5}$$

$$\langle 0(\theta)|\xi_k^\dagger(\theta) = \langle 0(\theta)|\tilde{\xi}_k^\dagger(\theta) = 0. \tag{7.6}$$

3.2 節の考察でわかるように，これらの演算子は元の演算子 $(a_k, \tilde{a}_k)$ と熱的 Bogoliubov 変換：

$$\xi_k(\theta) = c_k a_k - d_k \tilde{a}_k^\dagger \tag{7.7}$$

$$\tilde{\xi}_k(\theta) = c_k \tilde{a}_k - d_k a_k^\dagger \tag{7.8}$$

で関連している。ただし，$c_k = \cosh\theta_k$，$d_k = \sinh\theta_k$ である。個数パラメータ $n_k$ は

$$n_k \delta(\vec{k} - \vec{l}) \equiv \langle 0(\theta)|a_k^\dagger a_l|0(\theta)\rangle \tag{7.9}$$

で定義される。これより，$n_k[\delta(\vec{q})]_{\vec{q}=0} = \langle 0(\theta)|a_k^\dagger a_k|0(\theta)\rangle$ $(\vec{q} = \vec{k} - \vec{l})$ が得られる。$(2\pi)^3[\delta(\vec{q})]_{\vec{q}=0}$ は $\vec{q} = 0$ における $\exp[i\vec{q}\cdot\vec{x}]$ の空間積分であるので，それは体積である。したがって，$(2\pi)^{-3} n_k$ は数密度である。3.1.3 節で採用した呼び方にしたがって，$n_k$ を数密度と呼ぶことにする。

3.2 節と同様に，(7.7) と (7.8) を

$$\begin{bmatrix} a_k \\ \tilde{a}_k^\dagger \end{bmatrix}^\mu = B_k^{-1}(\theta)^{\mu\nu} \begin{bmatrix} \xi(\theta) \\ \tilde{\xi}_k^\dagger(\theta) \end{bmatrix}^\nu \tag{7.10}$$

$$[a_k^\dagger, -\tilde{a}_k]^\mu = [\xi_k^\dagger(\theta), -\tilde{\xi}_k(\theta)]^\nu B(\theta)^{\nu\mu} \tag{7.11}$$

と書く。ただし，Bogoliubov 行列 $B(\theta)$ は

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} c & -d \\ -d & c \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

で定義した。

熱的二重項の表記：

$$a_k^1 = a_k,\ a_k^2 = \tilde{a}_k^\dagger \tag{7.13}$$

$$\bar{a}_k^1 = a_k^\dagger,\ \bar{a}_k^2 = -\tilde{a}_k \tag{7.14}$$

$$\xi_k^1 = \xi_k,\ \xi_k^2 = \tilde{\xi}_k^\dagger \tag{7.15}$$

$$\bar{\xi}_k^1 = \xi_k^\dagger,\ \bar{\xi}_k^2 = -\tilde{\xi}_k \tag{7.16}$$

を採用すると，(7.10) と (7.11) は

$$a_k^\mu = B_k(\theta)^{\mu\nu}\xi_k(\theta)^\nu \tag{7.17}$$

$$\bar{a}_k^\mu = \bar{\xi}_k(\theta)^\nu B_k^{-1}(\theta)^{\nu\mu} \tag{7.18}$$

となる。以下では，熱的二重項表記をたびたび利用することにする。

3.2 節によれば，この変換は

$$U_B(\theta) = \exp[iG_B(\theta)] \tag{7.19}$$

を用いて，

$$\xi_k(\theta) = U_B(\theta)a_k U_B^{-1}(\theta) \tag{7.20}$$

$$\tilde{\xi}_k(\theta) = U_B(\theta)\tilde{a}_k U_B^{-1}(\theta) \tag{7.21}$$

のように誘起される。ただし

$$G_B(\theta) = i\int d^3k\,\theta_k[a_k\tilde{a}_k - \tilde{a}_k^\dagger a_k^\dagger] \tag{7.22}$$

である。

3.2 節ではこの生成子を用いて，$a_k\tilde{a}_k$ 対（サーマル・ペアと呼ばれる）が真空 $|0(\theta)\rangle$ に凝縮していることを示した。そこでは，真空 $|0(\theta)\rangle$ 上に作られた Fock 空間を $\mathcal{H}(\theta)$ と記した。こうして，サーマル・ペアが凝縮することにより

Fock 空間が $\mathcal{H}(\theta)$ とパラメータ化され，非同値集合が形成された。非同値集合では，$\theta \neq \theta'$ のとき $\mathcal{H}(\theta)$ と $\mathcal{H}(\theta')$ が互いに非同値である。この定式化を熱物理学に応用するときには，$\theta$ は熱状態を区別するパラメータとなる：たとえば，異なった温度には異なった $\theta$ が対応する。

3.3 節で議論したように，生成子 $G_B$ は異常演算子であり，その定義にはぼかし技巧を用いるなどの特別な注意を払う必要がある。もっとも，この生成子を用いると，真空構造の直観的理解の補助としてしばしば役に立つ。(7.7) と (7.8) の表式の方は問題のない定義であることを強調しておく；$\mathcal{H}(\theta)$ 中のベクトルへの $a_k$ と $\tilde{a}_k$ の演算は，この表式を通じて定義されている。$a_k$ と $\tilde{a}_k$ は真空 $|0(\theta)\rangle$ を消去しないので，消滅演算子と呼んではならない。

$a_k^\dagger$ と $\tilde{a}_k^\dagger$ がそれぞれ $a_k$ と $\tilde{a}_k$ の Hermite 共役であることと $U_B(\theta)$ がユニタリ演算子であることにより，$\xi_k^\dagger$ と $\tilde{\xi}_k^\dagger$ はそれぞれ $\xi_k$ と $\tilde{\xi}_k$ の Hermite 共役になる。したがって，この表式ではダガー記号は Hermite 共役を意味する。これは自明と思えるかも知れないが，後でダガー共役の定義を一般化する上で重要になる。小節 2.4.3 で，二つのパラメータの存在を指摘したが，それらの選び方によってはブラ真空がケット真空の Hermite 共役とはならない。二つのパラメータとは $\alpha$ と $(c_1/c_2)$ のことである。パラメータ $(\alpha, c_1, c_2)$ は，真空を定義した (2.90) と (2.91) 中に現われた。ブラ真空がケット真空の Hermite 共役である表現をユニタリ表現と呼ぶ。それは，$\alpha = 1/2$ と $c_1/c_2 = 1$ のときに得られる。TFD において $U_B$ がユニタリとなるのは，このユニタリ表現の場合である。ユニタリ表現ではダガー共役は Hermite 共役となる。ユニタリ表現の TFD はユニタリ TFD と呼ばれる。

TFD では，ユニタリ表現であっても Bogoliubov 行列がユニタリであることを意味しない。(7.16) の熱的二重項の定義によれば，Bogoliubov 変換の第 2 式，つまり (7.18) は

$$[\xi(\theta)^\mu]^\dagger = [a^\nu]^\dagger [\tau_3 B^{-1}(\theta)\tau_3]^{\nu\mu} \tag{7.23}$$

となる。ただし，Pauli 行列：

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},\ \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{7.24}$$

を用いている。一方，Bogoliubov 変換の第 1 式，つまり (7.17) の Hermite 共役をとると

$$[\xi(\theta)^\mu]^\dagger = [a^\nu]^\dagger [B^\dagger(\theta)]^{\nu\mu} \tag{7.25}$$

を得る。これと (7.23) を比較すると **Bogoliubov 行列がユニタリ表現であるための条件は**

$$B^\dagger(\theta) = \tau_3 B^{-1}(\theta)\tau_3 \tag{7.26}$$

であることがわかる。

小節 2.3.2 で示したように，熱的真空が時間に依存しないためには非チルダ系とチルダ系のエネルギー間に特別な関係が必要である。その議論は以下のようになる。考えている系の自由ハミルトニアンが

$$H_{tot} = \int d^3k[\omega_k^1 a_k^\dagger a_k + \omega_k^2 \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k] \tag{7.27}$$

であるとする。このとき，振動子演算子の時間依存性は $a_k \exp[-i\omega_k^1 t]$ と $\tilde{a}_k \exp[-i\omega_k^2 t]$ になる。したがって，サーマル・ペア波動関数の時間依存性は，$\exp[i(\omega_k^1 + \omega_k^2)t]$ で与えられることがわかり，$\omega_k^2 = -\omega_k^1$ でないかぎりサーマル・ペアは時間に依存してしまう。このことより，熱的真空 $|0(\theta)\rangle$ が時間 $t$ に依存しないのは，$\omega_k^2 = -\omega_k^1$ のときだけであることがわかる。このことは，$\omega_k^2 = -\omega_k^1$ 以外では，ハミルトニアン $H_{tot}$ と生成子 $G_B$ が非可換であることからも知ることができる。

真空が時間に依存しないことを要求すると，自由場の全ハミルトニアンは

$$\hat{H}_0 = \int d^3k\omega_k[a_k^\dagger a_k - \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k] \tag{7.28}$$

となる。これが TFD における自由場ハミルトニアンである。

$\omega_k^2 = -\omega_k^1$ の関係より，チルダ量子は真空にできた非チルダ量子の空孔という見方ができる。この描像は次の考察によりさらに補強される。温度 $T$ の熱平衡状態にある系を考えよう。この系がどれだけの自由度をもっているか知るために，外乱に対するこの系の応答を調べてみよう。$T \neq 0$ のとき，この系にはある数の量子粒子が凝縮している。したがって，この系による外からのエネルギーの吸収には二通りの過程が考えられる。一つはあらたな量子を励起することによる吸収である。もう一つは，外乱により真空中に凝縮した量子を励起して，そこに空孔を生成する過程である。結局，外乱によって量子か空孔が生成されるのである。自由度を倍化したのはこのためである。

3.4.2 節で示したように，この小節で述べたことはフェルミオン場の熱的真空にも適用できる。(3.44) と (3.45) により，フェルミオンの場合の Bogoliubov 変換は

$$a_k^\mu = B_k(\theta)^{\mu\nu}\xi_k(\theta)^\nu \tag{7.29}$$

$$\bar{a}_k^{\mu} = \bar{\xi}_k(\theta)^{\nu} B_k^{-1}(\theta)^{\nu\mu} \tag{7.30}$$

となる。ただし，熱的二重項表記は

$$a_k^1 = a_k,\ a_k^2 = \tilde{a}_k^{\dagger} \tag{7.31}$$

$$\bar{a}_k^1 = a_k^{\dagger},\ \bar{a}_k^2 = \tilde{a}_k \tag{7.32}$$

と

$$\xi_k^1 = \xi_k,\ \xi_k^2 = \tilde{\xi}_k^{\dagger} \tag{7.33}$$

$$\bar{\xi}_k^1 = \xi_k^{\dagger},\ \bar{\xi}_k^2 = \tilde{\xi}_k \tag{7.34}$$

である。$\bar{a}_k^2$ と $\bar{\xi}_k^2$ の定義の符号に注意せよ。それはボソンの場合，負符号となっていたものである。

Bogoliubov 行列は (3.46) で与えられる：

$$B_k(\theta) = \begin{bmatrix} c_k & -d_k \\ d_k & c_k \end{bmatrix} \tag{7.35}$$

ただし，$c_k = \cos\theta_k$，$d_k = \sin\theta_k$ である。数密度パラメータは $n_k[\delta(\vec{q})]_{\vec{q}=0} \equiv \langle 0|a_k^{\dagger} a_k|0\rangle$ で与えられる。また $n_k = d_k^2$ である。なお，この Bogoliubov 行列はユニタリ表現であるための条件 (7.26) を満たしている。

(7.29) と (7.30) の変換は，$U_B(\theta)$ により

$$\xi_k(\theta) = U_B(\theta) a_k U_B^{-1}(\theta) \tag{7.36}$$

$$\tilde{\xi}_k(\theta) = U_B(\theta) \tilde{a}_k U_B^{-1}(\theta) \tag{7.37}$$

で誘起される。ただし，$U_B(\theta)$ は (3.50)：

$$U_B(\theta) = \exp\left[-\int d^3k\theta_k[a_k\tilde{a}_k - \tilde{a}_k^{\dagger} a_k^{\dagger}]\right] \tag{7.38}$$

で与えられた。

### 7.2.2　チルダ共役則

TFD では，あらゆる力学的自由度は倍化されている；いかなる演算子 $A$ もそのチルダ共役 $\tilde{A}$ を随伴している。そのため 2.3 節で簡単に触れたチルダ共役の規則が必要となる。そこで，今までの考察で明らかにされた TFD の基本的な性質を抽出することによって，チルダ共役の詳しい構造を調べる。

さて，$a$ 粒子波動関数の時間依存性は $\exp[-i\omega_k t]$ であり，$\tilde{a}$ 粒子では $\exp[i\omega_k t]$ である。したがって，$\tilde{a}_k^\dagger$ に対する波動関数の時間依存性は $\exp[-i\omega_k t]$ となり，$a_k$ の波動関数と同じ依存性をもつ。任意の時刻に，$a_k$ と $\tilde{a}_k^\dagger$ が Bogoliubov 変換によって混合されるためには，$a$ と $\tilde{a}^\dagger$ 双方の波動関数が同じ形でなければならないので，このことはたいへん重要である。

$a_k$ の波動関数を $\tilde{a}_k$ のものと比較すると，虚数単位 $i$ の符号が替わることがわかる。したがって，c 数はチルダ共役の下に複素共役となるのである。

ところで，個数パラメータが演算子 $a_k^\dagger a_k$ の真空期待値で与えられ，それは $\tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k$ の真空期待値と同じであることを思い出そう。これからわかるように，$\tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k$ は $a_k^\dagger a_k$ のチルダ共役と解釈するのが適切である。$a_k$ と $a_k^\dagger$ は互いに非可換なので，この演算子の順序は重要である。そこで，チルダ共役は演算子の順序を替えないものと仮定する。熱的真空が $a\tilde{a}$ 対の凝縮した状態であることも思い出そう。これより，真空がチルダ共役の下に不変であることがわかる。

なお，Bogoliubov 変換に対する自己無撞着条件がある；Bogoliubov 変換は，チルダ共役の下で不変でなくてはならない。このことより，チルダ共役を 2 回とった場合に対する次の規則が導かれる： $\tilde{\tilde{a}}_k = \sigma a_k$. ただし，$\sigma$ は

$$\sigma = \begin{cases} 1 & \text{（ボソンの場合）} \\ -1 & \text{（フェルミオンの場合）} \end{cases} \tag{7.39}$$

で定義される符号定数である。フェルミオンに対して，$\tilde{\tilde{a}}_k = a_k$ となるように $U_B$ を選ぶこともできる。どのみち物理量にはこの符号定数は現われないので，この節で与えた定義を採用することにする。

以上，TFD の基本的な関係を簡単にまとめると以下のようになる：任意の演算子 $A$ はそのチルダ共役 $\tilde{A}$ を随伴するが，そのチルダ共役は次の規則により定義される：

$$(AB)^{\sim} = \tilde{A}\tilde{B} \tag{7.40}$$

$$(c_1 A + c_2 B)^{\sim} = c_1^* \tilde{A} + c_2^* \tilde{B} \tag{7.41}$$

$$(A^\dagger)^{\sim} = \tilde{A}^\dagger \tag{7.42}$$

$$(\tilde{A})^{\sim} = \sigma A \tag{7.43}$$

$$|0(\theta)\rangle^{\sim} = |0(\theta)\rangle \tag{7.44}$$

$$\langle 0(\theta)|^{\sim} = \langle 0(\theta)|. \tag{7.45}$$

ただし，$c_1$ と $c_2$ は任意の c 数であり，$A$ と $B$ は任意の演算子を表わす。チル

ダ共役では c 数の複素共役をとり，また真空がチルダ不変であるということより，(2.90) と (2.91) で定義されたブラ真空とケット真空に付随する重要でない位相自由度が消去できることを小節 2.4.3 で示した。便宜上このことをここに再記しておく。

次節でわかるように，これらのチルダ共役則は TFD の体系の基礎的部分を形成する。

**問 1** チルダ共役の下で Bogoliubov 変換が不変であることを示せ。

チルダ共役則を利用すると，自由ハミルトニアン (7.28) は以下の形に書くことができる：

$$\hat{H}_0 = H_0 - \tilde{H}_0. \tag{7.46}$$

ただし，

$$H_0 = \int d^3k\ \omega_k a_k^\dagger a_k \tag{7.47}$$

である。

TFD では，すべての力学的観測量はチルダなしの $a$ 演算子だけで構成される。$H_0$ の期待値は力学的エネルギーである。しかし，ハミルトニアンは非チルダ演算子とチルダ演算子双方の時間変化を誘起しなければならないので，全ハミルトニアンは $H_0$ ではなく $\hat{H}_0$ である。$\hat{H}_0$ の固有値はハット・エネルギーとよばれる。

チルダ演算子は力学的観測量には寄与しないが，熱エネルギー，エントロピー等の熱力学的観測量は非チルダ演算子とチルダ演算子双方を必要とする。このことに関しては，後の節や章で議論する。

TFD では熱的二重項表記をたびたび用いるので，ここでボソンとフェルミオン双方の場合に関してそれらを整理しておく：つまり，

$$a_k^1 = a_k,\ \ a_k^2 = \tilde{a}_k^\dagger \tag{7.48}$$

$$\bar{a}_k^1 = a_k^\dagger,\ \ \bar{a}_k^2 = -\sigma\tilde{a}_k \tag{7.49}$$

および

$$\xi_k^1 = \xi_k,\ \ \xi_k^2 = \tilde{\xi}_k^\dagger \tag{7.50}$$

$$\bar{\xi}_k^1 = \xi_k^\dagger,\ \ \bar{\xi}_k^2 = -\sigma\tilde{\xi}_k \tag{7.51}$$

である。ただし，$\sigma$ はボソンに対しては正，フェルミオンに対しては負である。

$\bar{a}$ と $\bar{\xi}$ は

$$\bar{a}^{\mu} = a^{\nu\dagger}[\tau_{\sigma}]^{\nu\mu} \tag{7.52}$$

$$\bar{\xi}^{\mu} = \xi^{\nu\dagger}[\tau_{\sigma}]^{\nu\mu} \tag{7.53}$$

なる関係式で表わせる。ただし，行列 $\tau_{\sigma}$ は

$$\tau_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sigma \end{bmatrix} \tag{7.54}$$

である。

ユニタリ表現であるための条件 (7.26) は

$$B^{\dagger}(\theta) = \tau_{\sigma} B^{-1}(\theta) \tau_{\sigma} \tag{7.55}$$

となる。

ユニタリ表現における Bogoliubov 行列の一般形は

$$B_k(\theta) = \begin{bmatrix} c_k & -d_k \\ -\sigma d_k & c_k \end{bmatrix} \tag{7.56}$$

で与えられる。ただし，$c_k$ と $d_k$ は

$$c_k^2 - \sigma d_k^2 = 1 \tag{7.57}$$

なる関係式を満たすものとする。

熱的二重項の定義は，$a_k$ と $a_k^{\dagger}$ のみで構成されている任意の演算子 $A$ に拡張できる：

$$A^1 = A, \quad A^2 = \tilde{A}^{\dagger} \tag{7.58}$$

$$\bar{A}^1 = A^{\dagger}, \quad \bar{A}^2 = -\sigma\tilde{A}. \tag{7.59}$$

ただし，$\sigma$ は，ボソン的な $A$ に対しては正，フェルミオン的な $A$ に対しては負である。なお，ボソン的（フェルミオン的）$A$ の意味は，フェルミオン場を偶数（奇数）個かけた項やボソン場を任意個かけた項の和で構成された演算子のことである。

### 7.2.3 TFD 非ユニタリ表現

ここまでは，特定の形の Bogoliubov 行列を考察してきた。しかし，$a_k$ と $\tilde{a}_k^{\dagger}$ を混合するいかなる変換も，その変換の生成子がハミルトニアンと可換である

かぎり熱的真空の生成に用いられる。そこで，もっとも一般的な生成子を見つけてみよう。摂動計算を行うので，非摂動自由場に興味がある。この節では自由場に対するもっとも一般的な Bogoliubov 変換を求める。これは次節で，相互作用している量子場の摂動計算を定式化する際に有用である。

(7.46) の自由ハミルトニアン：

$$\hat{H}_0 = H_0 - \tilde{H}_0 \tag{7.60}$$

$$= \int d^3k\omega_k[a_k^\dagger a_k - \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k] \tag{7.61}$$

から出発する。

Bogoliubov 生成子を $\hat{G}$ と記そう：

$$\begin{aligned} \xi_k(\theta) &= e^{i\theta\hat{G}}a_k e^{-i\theta\hat{G}}, \qquad & \xi_k^\dagger(\theta) &= e^{i\theta\hat{G}}a_k^\dagger e^{-i\theta\hat{G}} \\ \tilde{\xi}_k(\theta) &= e^{i\theta\hat{G}}\tilde{a}_k e^{-i\theta\hat{G}}, \qquad & \tilde{\xi}_k^\dagger(\theta) &= e^{i\theta\hat{G}}\tilde{a}_k^\dagger e^{-i\theta\hat{G}}. \end{aligned} \tag{7.62}$$

ここで注意しておくことがある。$a_k$ と $\tilde{a}_k$ につけられたダガー記号は Hermite 共役を意味するが，他の演算子につけられたダガー記号は必ずしも Hermite 共役を意味しない：たとえば，$\xi^\dagger$ と $\tilde{\xi}^\dagger$ は上の関係式を通じて定義される。一般に，演算子 $A$ のダガー共役は，$a_k$ と $\tilde{a}_k$ を用いて書かれた $A$ の表式を通して定義される。

$\hat{G}$ が満たすべき要請が三つある。一つめは

$$\xi_k(\theta)^\mu = B_k(\theta)^{\mu\nu}a_k^\nu \tag{7.63}$$

$$\bar{\xi}_k(\theta)^\mu = \bar{a}_k^\nu B_k^{-1}(\theta)^{\nu\mu} \tag{7.64}$$

の形の変換を誘起することである。ただし，熱的二重項の定義は前節で与えられたものである。

二つめは，$\hat{H}_0$ **との可換性である**：

$$[\hat{H}_0, \hat{G}] = 0. \tag{7.65}$$

三つめは熱的真空のチルダ不変性である。チルダ共役の下に真空が不変であるという要請により，$\hat{G}$ のチルダ共役は符号が替わる：

$$(\hat{G})^{\tilde{}} = -\hat{G}. \tag{7.66}$$

以上三つの要請の下に，$\hat{G}$ 対称性を決定する。

$\hat{G}$ は線形混合を生成すべきものなので，振動子演算子に関して双一次でなくてはならない。$\hat{H}_0$ と可換な双一次形式は，次の 4 項のみである：$a_k\tilde{a}_k$，$\tilde{a}_k^\dagger a_k^\dagger$，$a_k^\dagger a_k$，$\tilde{a}_k^\dagger\tilde{a}_k$．結局，$\theta\hat{G}$ は以下の形で与えられる：

$$\theta\hat{G} = \int d^3k \sum_{i=1}^{4} \theta_{i,k}\hat{G}_{i,k}. \tag{7.67}$$

ただし，

$$\hat{G}_{1,k} = i(a_k\tilde{a}_k - a_k^\dagger\tilde{a}_k^\dagger) \tag{7.68}$$

$$\hat{G}_{2,k} = i(a_k\tilde{a}_k + a_k^\dagger\tilde{a}_k^\dagger) \tag{7.69}$$

$$\hat{G}_{3,k} = i(a_k^\dagger a_k + \tilde{a}_k^\dagger\tilde{a}_k) \tag{7.70}$$

$$\hat{G}_{4,k} = a_k^\dagger a_k - \tilde{a}_k^\dagger\tilde{a}_k \tag{7.71}$$

である。しかし，$\hat{H}_0(\theta)$ に比例している演算子 $\hat{G}_{4,k}$ は，他の $\hat{G}_{i,k}$ $(i = 1 \sim 3)$ と可換であり，熱的真空を変化させることもない。したがって，この項を考慮する必要はなく，三つのパラメータ $\theta_{i,k}$ $(i = 1, 2, 3)$ のみを考えればよいことになる。生成子 $\hat{G}_{i,k}$ $(i = 1 \sim 3)$ は SU(1,1) の代数を満たす。

なお，$\hat{G}_{2,k}$ と $\hat{G}_{3,k}$ は反 Hermite である。

小節 2.4.3 で示したように，ブラ真空がケット真空の Hermite 共役であるという要請をしない場合，熱的真空を定義するためには三つのパラメータ $\alpha$，$c_1/c_2$，$f$ を決定する必要がある。3 種のパラメータ $\theta_{i,k}$ $(i = 1, 2, 3)$ が存在することは，これと対応している。

厄介な計算ではあるが，(7.62) の関係を用いると行列 $B_k(\theta)$ が求められる。ボソン場に対する行列を求めるためには，$\exp[i\theta\hat{G}]$ を

$$\exp[i\theta\hat{G}] = \exp[i\chi_1\hat{G}_3]\exp[-i\chi_2\hat{G}_2]\exp[i\chi_3\hat{G}_3]\exp[i\chi_2\hat{G}_2]\exp[-i\chi_1\hat{G}_3] \tag{7.72}$$

と書き換えておくと便利である。ただし，略記法

$$\chi_i\hat{G}_j = \int d^3k\, \chi_{i,k}\hat{G}_{j,k} \tag{7.73}$$

を導入した。この中の係数は

$$\tanh\chi_{1,k} = \frac{\theta_{2,k}}{\theta_{1,k}} \tag{7.74}$$

$$\tan 2\chi_{2,k} = \frac{\sqrt{\theta_{1,k}^2 - \theta_{2,k}^2}}{\theta_{3,k}} \tag{7.75}$$

$$\chi_{3,k}^2 = \theta_{3,k}^2 + \theta_{1,k}^2 - \theta_{2,k}^2 \tag{7.76}$$

で定義した。

こうして，

$$B_k(\theta)^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \cosh\chi_{3,k} + \sinh\chi_{3,k}\cos 2\chi_{2,k} & -e^{-2\chi_{1,k}}\sinh\chi_{3,k}\sin 2\chi_{2,k} \\ -e^{2\chi_{1,k}}\sinh\chi_{3,k}\sin 2\chi_{2,k} & \cosh\chi_{3,k} - \sinh\chi_{3,k}\cos 2\chi_{2,k} \end{bmatrix} \tag{7.77}$$

を得る。

行列 $B_k(\theta)$ の形を，通常 TFD で用いられているもの（たとえば，[1] を見よ）と比較してみよう。そこでは異なるパラメータが使われている。つまり，

$$B_k(\theta)^{\mu\nu} = (1+n_k)^{1/2} e^{s_k\tau_3} \begin{bmatrix} 1 & -f_k^{\alpha_k} \\ -f_k^{1-\alpha_k} & 1 \end{bmatrix} \tag{7.78}$$

の形で与えられている。ただし，$f_k = n_k/[1+n_k]$ であり，これは $n_k = f_k/[1-f_k]$ とも書ける。この行列は三つのパラメータ $n_k$，$\alpha_k$，$s_k$ を含んでいる。なお，$\tau_i$ $(i = 1 \sim 3)$ は Pauli 行列である。パラメータ $n_k$ は，

$$n_k(\theta)\delta(\vec{k} - \vec{l}) = \langle 0(\theta)|a_k^\dagger a_l|0(\theta)\rangle \tag{7.79}$$

で定義される数密度である。パラメータ $\alpha_k$ は (2.90)，(2.91) で導入されたパラメータ $\alpha$ である。このパラメータは，密度行列の体系で密度演算子を

$$\rho = \rho^{1-\alpha}\rho^{\alpha} \tag{7.80}$$

のように分解した際に現われるパラメータである［なお，対角和（トレース）の演算下では複数の演算子の積が循環できることに注意せよ］。したがって，通常は $\vec{k}$ に依存しない $\alpha$ を選ぶことにし，それを $\alpha$ と記す。

(7.77) と (7.78) を比較して，次のような $\{n_k, \alpha_k, s_k\}$ と $\theta_i$ (あるいは $\chi_i$) との間の 1 対 1 対応を得る：

$$n_k = \sinh^2\chi_{3,k}\sin^2 2\chi_{2,k} \tag{7.81}$$

$$\alpha_k = \frac{-2\chi_{1,k} + \frac{1}{2}\ln(\sinh^2\chi_{3,k}\sin^2 2\chi_{2,k})}{\ln\left(\frac{\sinh^2\chi_{3,k}\sin^2 2\chi_{2,k}}{1+\sinh^2\chi_{3,k}\sin^2 2\chi_{2,k}}\right)} \tag{7.82}$$

$$s_k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\cosh\chi_{3,k} + \sinh\chi_{3,k}\cos 2\chi_{2,k}}{\cosh\chi_{3,k} - \sinh\chi_{3,k}\cos 2\chi_{2,k}}\right). \tag{7.83}$$

上の考察はフェルミオンの場合にも容易に適用できる。ボソンとフェルミオン双方の場合の Bogoliubov 変換の一般形を記しておく。変換は，(7.63)，(7.64) と同一である：

$$\xi_k(\theta)^\mu = B_k(\theta)^{\mu\nu} a_k^\nu \tag{7.84}$$

$$\bar{\xi}_k(\theta)^\mu = \bar{a}_k^\nu B_k^{-1}(\theta)^{\nu\mu}. \tag{7.85}$$

ただし，熱的二重項の定義は前の小節のものと同じである。

Bogoliubov 行列は

$$B_k(\theta)^{\mu\nu} = (1+\sigma n_k)^{1/2} e^{s_k\tau_3} \begin{bmatrix} 1 & -f_k^\alpha \\ -\sigma f_k^{1-\alpha} & 1 \end{bmatrix} \tag{7.86}$$

で与えられる。ただし，$\sigma$ はボソンに対しては正であり，フェルミオンに対しては負である。$f_k$ は

$$f_k = \frac{n_k}{1+\sigma n_k} \tag{7.87}$$

であり，これは $n_k = f_k/[1-\sigma f_k]$ とも書ける。$\vec{k}$ に依存しない $\alpha_k$ を選び，$\alpha$ と記す。

上の行列の逆は

$$B_k^{-1}(\theta)^{\mu\nu} = (1+\sigma n_k)^{1/2} \begin{bmatrix} 1 & f_k^\alpha \\ \sigma f_k^{1-\alpha} & 1 \end{bmatrix} e^{-s_k\tau_3} \tag{7.88}$$

で与えられる。

**問 2** $B_k$ の $\alpha$ 依存性を強調したい場合には，$B_{\alpha k}$ と記す。以下の関係を証明せよ [2]：

$$B_{\alpha_1 k} = W_{21k}^{-1} B_{\alpha_2 k} W_{21k} \tag{7.89}$$

ただし

$$W_{21k} = f_k^{\frac{(\alpha_2-\alpha_1)}{2}\tau_3} \tag{7.90}$$

である。

この関係により，必要ならば $\alpha$ を変えることができる。

### 7.2.4 $\hat{G}$ 対称性の自発的破れ

$\hat{G}$ は真空を消去しない：

$$\theta\hat{G}|0(\theta)\rangle \neq 0. \tag{7.91}$$

これは，$\hat{G}$ によって誘起される変換の下に真空が不変でないことを意味している。なお，$\hat{H}_0$ と $\hat{G}$ は可換なので，ハミルトニアン $\hat{H}_0$ はこの変換の下に不変である。つまり，$\hat{G}$ の対称性は自発的に破れているのである。

$\hat{G}$ の構造を見ると，熱的真空は $a\tilde{a}$ 対が凝縮している状態であることがわかる。$|0(\theta)\rangle$ から $|0(\theta')\rangle$ への変化は，この凝縮対の分布が変わるために起こる。前の小節で議論したように，すべての力学的観測量は非チルダ $a$ 演算子のみで構成されている。したがって $H_0$ の期待値は力学的エネルギーである。しかし，ハミルトニアンは非チルダ演算子とチルダ演算子双方の時間変化を生成しなくてはならないので，ハミルトニアンは $H_0$ ではなく $\hat{H}_0$ である。$\hat{H}_0$ の固有値はハット・エネルギーと呼ばれる。$a$ 場はハット・エネルギー $\omega_k$ をもち，$\tilde{a}_k$ はハット・エネルギー $(-\omega_k)$ をもつ。したがって，真空中にあるサーマル・ペア $a\tilde{a}$ のハット・エネルギーは零である。これが，$\hat{G}$ 対称性の自発的破れに付随した NG モードである。

各真空 $|0(\theta)\rangle$ 上に作られた Fock 空間が存在する。これは $\mathcal{H}(\theta)$ と呼ばれる。これらの Fock 空間は連続パラメータ $\theta$ で区別され，非同値集合を形成している。パラメータ $\alpha_k$，$s_k$ は計算上の便宜的なものであるが，$n_k$ の変化は物理的な意味をもっている。

### 7.2.5 熱的状態条件

Bogoliubov 変換 (7.84)，(7.85) を考えると

$$\xi(\theta)|0(\theta)\rangle = \tilde{\xi}(\theta)|0(\theta)\rangle = 0 \tag{7.92}$$

$$\langle 0(\theta)|\xi^\dagger(\theta) = \langle 0(\theta)|\tilde{\xi}^\dagger(\theta) = 0 \tag{7.93}$$

より

$$[a_k - f_k^\alpha \tilde{a}_k^\dagger]|0(\theta)\rangle = 0 \tag{7.94}$$

$$[\tilde{a}_k - \sigma f_k^\alpha a_k^\dagger]|0(\theta)\rangle = 0 \tag{7.95}$$

$$\langle 0(\theta)|[a^\dagger - f_k^{1-\alpha}\tilde{a}_k] = 0 \tag{7.96}$$

$$\langle 0(\theta)|[\tilde{a}_k^\dagger - \sigma f_k^{1-\alpha} a_k] = 0 \tag{7.97}$$

を得る。これは熱的状態条件のもっとも簡単な形である。ここでは，パラメータ $\alpha_k$ は $\vec{k}$ に依存しないものとしている。

さて，$c_k$ を

$$f_k = e^{c_k} \tag{7.98}$$

で定義し，

$$\hat{M}_c = \int d^3k c_k \hat{N}_k \tag{7.99}$$

を導入しよう。ただし，

$$\hat{N}_k \equiv [a_k^\dagger a_k - \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k] \tag{7.100}$$

である。

$\hat{N}_k$ は $\hat{G}$ と可換であるから

$$\hat{N}_k = [\xi_k^\dagger(\theta)\xi_k(\theta) - \tilde{\xi}_k^\dagger(\theta)\tilde{\xi}_k(\theta)] \tag{7.101}$$

となる。これより

$$\hat{N}_k|0(\theta)\rangle = \langle 0(\theta)|\hat{N}_k = 0 \tag{7.102}$$

が得られ，さらに

$$\hat{M}_c|0(\theta)\rangle = \langle 0(\theta)|\hat{M}_c = 0 \tag{7.103}$$

を得る。

ところで，

$$e^{-\hat{M}_c} a_k e^{\hat{M}_c} = e^{c_k} a_k \tag{7.104}$$

$$e^{-\hat{M}_c} a_k^\dagger e^{\hat{M}_c} = e^{-c_k} a_k^\dagger \tag{7.105}$$

$$e^{-\hat{M}_c} \tilde{a}_k e^{\hat{M}_c} = e^{-c_k} \tilde{a}_k \tag{7.106}$$

$$e^{-\hat{M}_c} \tilde{a}_k^\dagger e^{\hat{M}_c} = e^{c_k} \tilde{a}_k^\dagger \tag{7.107}$$

である。

これより (7.94) は

$$[a_k - e^{-\alpha \hat{M}_c} \tilde{a}_k^\dagger]|0(\theta)\rangle = 0 \tag{7.108}$$

と書ける。

(7.94) の両辺に $a_l^\dagger$ をかけて (7.95) を用いると，

$$[a_l^\dagger a_k - e^{\alpha(c_k - c_l)} \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_l]|0(\theta)\rangle = 0 \tag{7.109}$$

となるが，これは

$$[a_l^\dagger a_k - e^{-\alpha \hat{M}_c}(\tilde{a}_l^\dagger \tilde{a}_k)^\dagger]|0(\theta)\rangle = 0 \tag{7.110}$$

と書ける。

同様な計算で

$$[A - e^{-\alpha \hat{M}_c}\tilde{A}^\dagger]|0(\theta)\rangle = 0 \tag{7.111}$$

$$\langle 0(\theta)|[A^\dagger - \tilde{A}e^{-(1-\alpha)\hat{M}_c}] = 0 \tag{7.112}$$

を得る。ただし $A$ は $a_k$ と $a_k^\dagger$ で構成された N 積の和を表わす。これらの熱的状態条件は，Heisenberg 演算子 $A$ のダイナミカルマップが自由場で書かれている場合に便利である。

温度 $T = 1/\beta$ の熱平衡状態の場合は，$f_k = \exp[-\beta\omega_k]$ となり，これより $c_k = -\beta\omega_k$ を得る。この場合，$\hat{M}_c = -\beta\hat{H}_0$ である。

熱平衡状態は定常なので，熱的真空は時間並進の下に不変であり，時間並進対称性は破られていない。したがって，4.6.1 節での Heisenberg 演算子のダイナミカルマップに関する考察を，熱平衡状態の TFD に拡張することができる。つまり，Heisenberg 場のダイナミカルマップが自由場で表わされている場合は，4 章で見たように，全ハミルトニアン $\hat{H}$ は $\hat{H}_0$ と弱い関係として等しい。こうして，上の式は熱平衡状態で

$$[A - e^{\beta\alpha\hat{H}}\tilde{A}^\dagger]|0(\theta)\rangle = 0 \tag{7.113}$$

$$\langle 0(\theta)|[A - \tilde{A}^\dagger e^{(1-\alpha)\beta\hat{H}}] = 0 \tag{7.114}$$

となる。

しかし，わずかでも時間に依存する場合には，TFD の準粒子場によるダイナミカルマップの扱いは注意を要する。このことは次章で調べる。

### 7.2.6 TFD における一体伝播関数

熱的 Bogoliubov 変換が求まったので，自由場に対する一体伝播関数の計算は簡単に実行できる。自由スカラー場 $\varphi(x)$ を考えよう。Bogoliubov パラメータ $\theta_i$ は時間によらないものと仮定する。

まず，場の方程式

$$[i\frac{\partial}{\partial t} - \omega(-i\vec{\nabla})]\varphi(x) = 0 \tag{7.115}$$

に従う場を考える。ただし，$\omega_k = \omega(\vec{k})$ は準粒子エネルギーである。この方程式に従う場を 1 型と呼ぶ。

TFD では $\varphi$ のチルダ共役を導入して，(7.59) の熱的二重項表記：

$$\varphi^1 = \varphi, \quad \varphi^2 = \tilde{\varphi}^\dagger \tag{7.116}$$

$$\bar{\varphi}^1 = \varphi^\dagger, \quad \bar{\varphi}^2 = -\sigma\tilde{\varphi} \tag{7.117}$$

を利用する。

つまりこれらの熱的二重項は，振動子演算子 $a_k^\mu$ を用いて

$$\varphi(x)^\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i[\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t]} a_k^\mu$$

$$\bar{\varphi}(x)^\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{-i[\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t]} \bar{a}_k^\mu \tag{7.118}$$

と表わされる。

絶対零度の場合から始めよう。絶対零度での一体伝播関数は

$$\varDelta_0(x-y)^{\mu\nu} = \langle\langle 0|T[\varphi(x)^\mu \bar{\varphi}(y)^\nu]|0\rangle\rangle \tag{7.119}$$

で与えられる。ただし，添え字の零は温度が絶対零度であることを意味する。

絶対零度では，熱的二重項の伝播関数の Fourier 変換は

$$\varDelta_0(x-y)^{\mu\nu} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ik(x-y)}\varDelta_0(k)^{\mu\nu} \tag{7.120}$$

となる。ただし

$$\varDelta_0(k)^{\mu\nu} = [\varDelta_0(k, \epsilon_F\tau_3)]^{\mu\nu} \tag{7.121}$$

$$= \left[\frac{i}{k_0 - \omega_k + i\epsilon_F\tau_3}\right]^{\mu\nu} \tag{7.122}$$

である。また，$\epsilon_F$ は Feynman による正の無限小量である。行列構造は $\tau_3$ だけに起因する。

**問 3** (7.122) を証明せよ。

ヒント 1： $\mu \neq \nu$ の成分は消える。

ヒント 2： $\varDelta_0(x-y)^{11}$ は，熱的自由度をもたない通常の場の理論の場合と同じである：

$$\varDelta_0(x-y)^{11} = \langle\langle 0|T[\varphi(x)\varphi^\dagger(y)]|0\rangle\rangle. \tag{7.123}$$

その Fourier 振幅は $\varDelta_0(k, \epsilon_F)^{11}$ と書かれる：

$$\varDelta_0(x-y)^{11} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{-ik(x-y)}\varDelta_0(k, \epsilon_F). \tag{7.124}$$

ただし

$$\Delta_0(k,\epsilon_F)^{11} = \frac{i}{k_0 - \omega_k + i\epsilon_F} \tag{7.125}$$

である。分子の $i$ 因子を別にすると，$\epsilon_F$ だけが虚数項である点は重要である。

ヒント 3：$\mu = \nu = 2$ に対しては

$$\Delta_0(x-y)^{22} = -\sigma\langle\langle 0|T[\tilde{\varphi}^\dagger(x)\tilde{\varphi}(y)]|0\rangle\rangle \tag{7.126}$$

$$= -\langle\langle 0|T[\tilde{\varphi}(y)\tilde{\varphi}^\dagger(x)]|0\rangle\rangle \tag{7.127}$$

である。負符号を除いて，これは $\Delta_0(y-x)^{11}$ のチルダ共役である。伝播関数は c 数であるから，これは $\Delta_0(y-x)^{11}$ の複素共役でもある。$x$ と $y$ の位置に注意せよ。これより，

$$\Delta_0(x-y)^{22} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ik(x-y)}\Delta_0(k,-\epsilon_F) \tag{7.128}$$

が得られる。$\Delta_0(x-y)^{22}$ は，$\Delta_0(x-y)^{11}$ と $\epsilon_F$ の符号だけ異なっていることがわかった。

熱的真空 $|0(\theta)\rangle$ による伝播関数は，Bogoliubov 変換 $B_k(\theta)$ を通じて $\Delta_0$ と関連している。つまり，

$$\Delta(x-y)^{\mu\nu} \equiv \langle 0(\theta)|T[\varphi(x)^\mu\bar{\varphi}(y)^\nu]|0(\theta)\rangle \tag{7.129}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{ik(x-y)}\Delta(k)^{\mu\nu} \tag{7.130}$$

で与えられる。ただし，

$$\Delta(k)^{\mu\nu} = [B_k^{-1}(\theta)\left(\frac{i}{k_0 - \omega_k + i\epsilon_F\tau_3}\right)B_k(\theta)]^{\mu\nu} \tag{7.131}$$

である。この伝播関数は，熱的自由度のない通常の場の量子論による伝播関数より，次の簡単な規則で求めることができる；$\epsilon_F$ を $\epsilon_F\tau_3$ で置き換え，Bogoliubov 変換を施す。

小節 7.2.3 の (7.78) で与えられた Bogoliubov 行列の一般表式を思い出そう。この表式には重要なパラメータ $n_k$ の他にパラメータ $\alpha$ と $s_k$ が含まれている。自由伝播関数の上の結果より，**パラメータ $s_k$ は伝播関数には寄与しない**ことがわかる。実は $s_k$ は $\xi_k$ と $\tilde{\xi}_k$ の規格化因子のみに影響を与えるが，その因子は任意にとれるのである。そこで，今後とくに断らないかぎり，$s_k = 0$ とする。

**問 4** 関係

$$\Delta(k) = \left[\frac{i\mathcal{P}}{k_0 - \omega_k} + \pi\delta(k_0 - \omega_k)A_k(\theta)\right] \tag{7.132}$$

を導け。ただし

$$A_k(\theta) = B_k^{-1}(\theta)\tau_3 B_k(\theta) \tag{7.133}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2\sigma n_k & -2f_k^{\alpha-1}n_k \\ 2\sigma f_k^{1-\alpha}[1+\sigma n_k] & -[1+2\sigma n_k] \end{bmatrix} \tag{7.134}$$

である。なお，$\mathcal{P}$ の記号は主値を意味する。

ヒント：公式

$$\frac{1}{\omega + i\epsilon_F} = \frac{\mathcal{P}}{\omega} - i\pi\delta(\omega) \tag{7.135}$$

を利用せよ。

Bogoliubov 行列を $\omega_k$ の関数として書くと便利である：

$$B_k(\theta) = B(\omega_k, \theta). \tag{7.136}$$

この場合，$A_k(\theta)$ を $A(\omega_k, \theta)$ と記す：

$$A(\omega, \theta) = B^{-1}(\omega, \theta)\tau_3 B(\omega, \theta). \tag{7.137}$$

$\Delta$ は

$$\Delta(k) = \left[\frac{i\mathcal{P}}{k_0 - \omega_k} + \pi\delta(k_0 - \omega_k)A(\omega_k, \theta)\right] \tag{7.138}$$

となる。熱の影響は，行列 $A$ を通してのみ現われていることに注意せよ。第 2 項に $\delta$ 関数があるので，$\omega_k$ は $k_0$ で置き換えられる：

$$\Delta(k) = \left[\frac{i\mathcal{P}}{k_0 - \omega_k} + \pi\delta(k_0 - \omega_k)A(k_0, \theta)\right]. \tag{7.139}$$

結局，

$$\Delta(k)^{\mu\nu} = [B^{-1}(k_0)\left(\frac{i}{k_0 - \omega_k + i\epsilon_F\tau_3}\right)B(k_0)]^{\mu\nu} \tag{7.140}$$

にたどりつく。ただし，$B(k_0)$ は $B(k_0, \theta)$ を意味する。Bogoliubov 行列の引数は，$\omega_k$ ではなく $k_0$（時間微分の Fourier 変換）であることに注意せよ。

さらに $\omega_k$ が非負のときには，$\omega_k$ は $|k_0|$ に置き換えられる：

$$\Delta(k)^{\mu\nu} = [B^{-1}(|k_0|)\left(\frac{i}{k_0 - \omega_k + i\epsilon_F\tau_3}\right)B(|k_0|)]^{\mu\nu}. \tag{7.141}$$

$k_0$ をとるか $|k_0|$ をとるかは自由であり，このことはしばしば役に立つ。自由伝播関数の一般形は，(7.89) にある関係：

$$B_{\alpha_1}(\omega) = W_{21}^{-1}(\omega)B_{\alpha_2}(\omega)W_{21}(\omega) \tag{7.142}$$

を利用すると得られる。ただし，$W_{21}$ は $\omega_k$ の関数とみなしている：

$$W_{21}(\omega_k) = f^{\frac{(\alpha_2-\alpha_1)}{2}\tau_3}(\omega_k). \tag{7.143}$$

$f_k$ は $\omega_k$ の関数である（$f_k = f(\omega_k)$）。

結局，

$$\Delta_{\alpha_1}(k)^{\mu\nu} = [W_{21}^{-1}(k_0)B_{\alpha_2}^{-1}(|k_0|)\left(\frac{i}{k_0-\omega_k+i\epsilon_F\tau_3}\right)B_{\alpha_2}(|k_0|)W_{21}(k_0)]^{\mu\nu} \tag{7.144}$$

が得られる。ただし，$\alpha=\alpha_1$ のときの伝播関数を $\Delta_{\alpha_1}(k)$ と記した。この表式を用いると，異なる $\alpha$ に属する伝播関数の間の関係が求まる。それは，

$$\Delta_{\alpha_1}(k) = W_{21}^{-1}(k_0)\Delta_{\alpha_2}(k)W_{21}(k_0) \tag{7.145}$$

で与えられる [2]。

$\varphi$ に対する場の方程式が

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \omega(-i\vec{\nabla})^2\right]\varphi(x) = 0 \tag{7.146}$$

の形で与えられるとき，その場 $\varphi$ は 2 型と呼ばれる。この場合には，2 組の振動子演算子が存在する；$a_k$ と $b_k$ である。それらの真空演算子を，それぞれ $\xi_k(\theta)$，$\eta_k(\theta)$ と記す。ここではボソン場を考察する。

この場合，

$$\varphi(x)^\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}}[e^{i[\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t]}a_k^\mu + e^{-i[\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t]}b_k^{\dagger\mu}] \tag{7.147}$$

$$\bar{\varphi}(x)^\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}}[e^{-i[\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t]}\bar{a}_k^\mu + e^{i[\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t]}\bar{b}_k^{\dagger\mu}] \tag{7.148}$$

となる。ただし，あらたに熱的二重項を導入した：

$$b_k^\mu = B_k^{-1}(\theta)^{\mu\nu}\eta_k(\theta)^\nu, \quad \bar{b}_k^\mu = \bar{\eta}(\theta)^\nu B_k(\theta)^{\nu\mu}. \tag{7.149}$$

二つの場

$$\varphi_a(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}}e^{i[\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t]}a_k \tag{7.150}$$

$$\varphi_b(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}}e^{i[\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t]}b_k \tag{7.151}$$

を導入し，熱的二重項を利用すると，これらは

$$\varphi(x)^{\mu} = \varphi_a(x)^{\mu} + [\tau_3 \bar{\varphi}_b^t(x)]^{\mu} \tag{7.152}$$

$$\bar{\varphi}(x)^{\mu} = \bar{\varphi}_a^{\mu} + [\varphi_b^t(x)\tau_3]^{\mu} \tag{7.153}$$

と書くこともできる。ただし，上つき添え字 $t$ は転置行列を意味する。

こうして，

$$\begin{aligned}\langle 0(\theta)|T[\varphi(x)^{\mu}\bar{\varphi}(y)^{\nu}]|0(\theta)\rangle &= \langle 0(\theta)|T[\varphi_a(x)^{\mu}\bar{\varphi}_a(y)^{\nu}]|0(\theta)\rangle \\ &\quad + \left(\tau_3\{\langle 0(\theta)|T[\varphi_b(y)\bar{\varphi}_b(x)]|0(\theta)\rangle\}^t\tau_3\right)^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{7.154}$$

が得られる。第2項で $x$ と $y$ が入れ替わっていることに注意せよ。

先に得られた1型の場に対する結果を $\varphi_a$ と $\varphi_b$ 双方に適用すると，次の因果伝播関数が得られる：

$$\Delta(x-y)^{\mu\nu} \equiv \langle 0(\theta)|T[\varphi(x)^{\mu}\bar{\varphi}(y)^{\nu}]|0(\theta)\rangle \tag{7.155}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{ik(x-y)}\Delta(k)^{\mu\nu} \tag{7.156}$$

ただし，

$$\begin{aligned}\Delta(k)^{\mu\nu} = \frac{i}{2\omega_k}\Bigg[&B^{-1}(k_0)\frac{1}{k_0-\omega_k+i\epsilon_F\tau_3}B(k_0) \\ &- \tau_3 B^t(-k_0)\frac{1}{k_0+\omega_k-i\epsilon_F\tau_3}B^{-1t}(-k_0)\tau_3\Bigg]^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{7.157}$$

である。

(7.142) の関係を用いると

$$\begin{aligned}\Delta_1(k)^{\mu\nu} = \frac{i}{2\omega_k}\Bigg[&W_{21}^{-1}(k_0)B_2^{-1}(k_0)\frac{1}{k_0-\omega_k+i\epsilon_F\tau_3}B_2(k_0)W_{21}(k_0) \\ &- W_{21}(-k_0)\tau_3 B_2^t(-k_0)\frac{1}{k_0+\omega_k-i\epsilon_F\tau_3}B_2^{-1t}(-k_0)\tau_3 W_{21}^{-1}(-k_0)\Bigg]^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{7.158}$$

を得る。ただし，$\Delta_1$ は $\alpha = \alpha_1$ の場合の伝播関数である。

$\omega_k$ が非負のときには，$\Delta$ は

$$\Delta_1(k)^{\mu\nu} = \frac{i}{2\omega_k}\left[W_{21}^{-1}(k_0)B_2^{-1}(|k_0|)\frac{1}{k_0-\omega_k+i\epsilon_F\tau_3}B_2(|k_0|)W_{21}(k_0)\right.$$
$$\left. - W_{21}(-k_0)\tau_3 B_2^t(|k_0|)\frac{1}{k_0+\omega_k-i\epsilon_F\tau_3}B_2^{-1t}(|k_0|)\tau_3 W_{21}^{-1}(-k_0)\right]^{\mu\nu} \tag{7.159}$$

と書ける。

ここで，$\alpha_2 = 1/2$ に選ぶと，$B_2^{-1} = \tau_3 B_2^t \tau_3$ となるので，$\alpha_2 = 1/2$ の場合の $B_2$ に対して

$$\Delta_1(k)^{\mu\nu} = \frac{i}{2\omega_k}\left[W_{21}^{-1}(k_0)B_2^{-1}(|k_0|)\frac{1}{k_0-\omega_k+i\epsilon_F\tau_3}B_2(|k_0|)W_{21}(k_0)\right.$$
$$\left. - W_{21}(-k_0)B_2^{-1}(|k_0|)\frac{1}{k_0+\omega_k-i\epsilon_F\tau_3}B_2(|k_0|)W_{21}^{-1}(-k_0)\right]^{\mu\nu} \tag{7.160}$$

が得られる。

$\alpha_1 = 1/2$ の場合は，$\alpha_1 = \alpha_2$ となり，そのため $W_{21} = 1$ となるので，これらの結果は特に簡単な形になる：

$$\Delta(k)^{\mu\nu} = [B^{-1}(|k_0|)\frac{i}{k_0^2-\omega_k^2+i\epsilon_F\tau_3}B(|k_0|)]^{\mu\nu}. \tag{7.161}$$

さて，熱現象を扱う理論を考察している（相対論的なモデルの場合にも Lorentz 対称性をもたない）ので，分散関係 $\omega^2(\vec{k}) = m^2 + \vec{k}^2$ は仮定していない；パラメータ $\omega(\vec{k})$ は $\vec{k}$ に依存する任意関数である。

2 型のボソンに対する上の考察は，Dirac 場などの 2 型のフェルミオンへも簡単に拡張できる。

この小節で求めた伝播関数は，Feynman 図法を使う際に利用する。$n_k$ が熱平衡状態での表式で与えられるときには，2 型の場に対する伝播関数の簡単な形が得られる。それはこの節の終わりで示すことにする。

ここで重要な定理を紹介する。その定理によると，量子場のモデルが絶対零度でくりこみ可能（くりこみ法により，すべての紫外発散が取り除かれる）であるならば，有限温度でもくりこみ可能である。このことを証明するために [3],

(7.139) を次のように書き換える：

$$\Delta(k) = \left[\frac{i}{k_0 - \omega_k + i\epsilon_F\tau_3} + \pi\delta(k_0 - \omega_k)(A_k(k_0, \theta) - \tau_3)\right]. \tag{7.162}$$

ただし，行列 $A_k$ は (7.134) で与えられたものである。熱の影響すべてを担っている第2項は，高エネルギー極限で指数関数的に消える。つまり，熱の影響が，絶対零度における発散をさらに悪くすることはないのである。伝播関数をこのように分離して Feynman 図の各線に代入し，第2項のべきで展開すると，低温展開が得られる。

数密度 $n$ が熱平衡状態の表式：

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - \sigma} \tag{7.163}$$

で与えられるとき，2型の場に対する伝播関数 (7.157) の表式は，さらに簡単化される。それは，熱平衡状態での $n_k$ が

$$1 + \sigma n(-k_0) = -\sigma n(k_0) \tag{7.164}$$

を満たしているからであり，これより

$$1 + 2\sigma n(-k_0) = -[1 + 2\sigma n(k_0)] \tag{7.165}$$

が得られるからである。行列に対する (7.134) 式，$A = B^{-1}\tau_3 B$ を思い出そう。これと $n(k_0)$ に対する上の関係式を用いると

$$A(-k_0) = -\tau_3 A^t(k_0)\tau_3 \tag{7.166}$$

が得られ，これは

$$\tau_3 B^t(-k_0)\tau_3 B^{-1,t}(-k_0)\tau_3 = -B^{-1}(k_0)\tau_3 B(k_0) \tag{7.167}$$

を与える。この関係を用いると，(7.157) は

$$\Delta(k)^{\mu\nu} = B^{-1}(k_0)\frac{i}{(k_0 + i\epsilon_F\tau_3)^2 - \omega_k^2}B(k_0) \tag{7.168}$$

と書き直すことができる。

なお，この伝播関数の (11) 成分は，有名な論文 [4] で与えられた Dolan-Jackiw の伝播関数である。

## 7.3 TFD の一般的構造

自由度を倍化した TFD において，いかにして熱の影響が扱えるかを前節で説明した。この議論は，2 モード・スクイーズド状態から始められたが,「量子場系での熱理論を演算子形式で定式化するためには，自由度を倍化する必要がある」という考えは古くからあった。小節 5.3.6 では，超伝導状態における NG モードへの Coulomb ポテンシャルの影響が，正準変換法によって容易に取り入れられることを見た。しかし，この計算を，温度 Green 関数法によって有限温度の場合に拡張することは簡単ではない。それを行うためには，有限温度における演算子形式の理論が必要となるからである。これが，[5] で自由度を倍化し，TFD を発展させた動機である。温度 $T = 1/\beta$ での平均粒子数が $n_k = f_k/[1 - \sigma f_k]$ ($f_k = \exp[-\beta\omega_k]$) で与えられるということより,「これらの粒子は真空に凝縮しているのではないか？」と考え,「粒子数のこの時間依存性を取り扱うためには，自由度を倍化して Bogoliubov 変換を可能にすればよいのだ」と思いついたのである。上記の論文 [5] は超伝導状態を調べるために書かれたものであるが，その論文で必要な計算が実行できるように，演算子形式とグリーン関数形式による TFD の計算法が与えられた。しかし，その論文の主題が超伝導であったため，有限温度の系に対する実時間形式の一般論を与えたものとは認識されなかった。その有限温度に対する実時間形式の理論を一貫した形で初めて紹介したのは [6] である。その論文で，この理論は Thermo Field Dynamics（TFD）と名づけられ，純粋状態による真空期待値と混合状態によるアンサンブル平均（本書 2 章で与えられたもの）の同等性が，はっきりと示された。熱的状態条件も，そこで導入された。チルダ共役則の系統的な説明は [7] でなされた。TFD のまとめと 1982 年までになされたその応用は，[8] で与えられている。

この節では，TFD の基礎を一般的な形で与える。TFD では，すべての演算子 $A$ には [8, 1] で与えられたチルダ共役則によって得られる演算子 $\tilde{A}$ が付随する。ここで，その規則をあらためて列挙しておく：

$$(AB)^{\sim} = \tilde{A}\tilde{B} \tag{7.169}$$

$$(c_1 A + c_2 B)^{\sim} = c_1^* \tilde{A} + c_2^* \tilde{B} \tag{7.170}$$

$$(A^\dagger)^{\sim} = \tilde{A}^\dagger \tag{7.171}$$

$$(\tilde{A})^{\sim} = \sigma A \tag{7.172}$$

$$|0(\theta)\rangle^{\sim} = |0(\theta)\rangle \tag{7.173}$$

$$\langle 0(\theta)|^{\sim} = \langle 0(\theta)|. \tag{7.174}$$

ただし，$c_1$ と $c_2$ は任意の c 数であり，$A$ と $B$ は任意の演算子を表わしている。

量子場の系が与えられると，そのラグランジアンから Heisenberg 演算子である力学的ハミルトニアン $H$ が得られる。TFD では，ハミルトニアンは非チルダ演算子とチルダ演算子双方の時間並進を誘起しなければならないので，$H$ はハミルトニアンではない。TFD でのハミルトニアンを $\hat{H}$ と記した。熱的効果は非チルダ場の Heisenberg 方程式を変えてはならないので，チルダ場と非チルダ場双方を含んでいる項は，ハミルトニアン $\hat{H}$ には現われない。

Heisenberg 場 $\psi(x)$ に対する Heisenberg 方程式は，

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = [\psi(x), \hat{H}] \tag{7.175}$$

で与えられる。チルダ共役の下で c 数はその複素共役となるので，この Heisenberg 方程式のチルダ共役をとるとチルダ場に対する次の Heisenberg 方程式が得られる：

$$-i\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}(x) = [\tilde{\psi}(x), (\hat{H})^{\sim}]. \tag{7.176}$$

これより

$$(\hat{H})^{\sim} = -\hat{H} \tag{7.177}$$

を得る。

この考察より $\hat{H}$ の形は

$$\hat{H} = H - \tilde{H} \tag{7.178}$$

となる。

上記のチルダ共役則のリストとハミルトニアンの構造に関する (7.178) が，TFD の一般的な基礎を形作っている。

$\hat{H}$ の期待値はハット・エネルギーと呼ばれ，$\hat{E}$ と記す。一方，$H$ の期待値は力学的エネルギー $E$ である。$\hat{H}$ の固有ベクトルである熱的真空を調べよう。それは

$$\hat{H}|0\rangle = \hat{E}|0\rangle \tag{7.179}$$

で定義される。

$\hat{H}$，$|0\rangle$，$\hat{E}$ はチルダ共役の下に

$$\begin{aligned}(\hat{H})^{\sim} &= -\hat{H}\\ |0\rangle^{\sim} &= |0\rangle\\ (\hat{E})^{\sim} &= \hat{E}\end{aligned} \tag{7.180}$$

と変換されることを考慮すると，(7.179) より

$$\hat{E} = 0 \tag{7.181}$$

が得られる。

つまり，ハット・エネルギー固有状態である熱的真空は，零ハット・エネルギー状態の集合をなす。それらの状態を $\theta$ で区別して，その集合を $\{|0(\theta)\rangle\}$ と記す。(7.178) 中の $\tilde{H}$ の前の負符号は，$\{|0(\theta)\rangle\}$ が連続集合であることを示している。同じ負符号は，ハット・エネルギー・スペクトルが下に有界でないというもう一つの重要な結果を導く。

(7.181) より

$$\hat{H}|0(\theta)\rangle = 0 \tag{7.182}$$

が得られ，これより，集合 $\{|0(\theta)\rangle\}$ の各要素は定常状態であることがわかる。このことは，TFD では時間に依存する熱過程は扱えないということを意味するわけではない。9 章で見るが，TFD は，時間に依存する熱物理学を扱う好都合な体系を提供していると考えられる。ここでは，熱的過程が時間に依存する場合は，初期真空が $\hat{H}$ の固有ベクトルではないことだけを指摘しておく。

零ハット・エネルギー真空の連続集合には，零ハット・エネルギー・モードの演算子が存在する。あるケット熱真空状態を別の熱真空状態へ移す次の演算子 $\hat{G}$ を導入しよう：

$$|0(\theta + d\theta)\rangle = e^{id\theta\hat{G}}|0(\theta)\rangle. \tag{7.183}$$

ただし，$d\theta$ は無限小量である；真空は

$$\langle 0(\theta)|0(\theta)\rangle = 1 \tag{7.184}$$

と規格化されていなければならないので，(7.183) よりブラ真空状態に対する

$$\langle 0(\theta + d\theta)| = \langle 0(\theta)|e^{-id\theta\hat{G}} \tag{7.185}$$

が得られる。

(7.183)，(7.185) 中の積 $d\theta\hat{G}$ は，一般的には内積：

$$d\theta\hat{G} = \sum_i d\theta_i\hat{G}_i \tag{7.186}$$

と解釈すべきである。ただし，$\hat{G}_i$ は複数の生成子を表わす。

$\hat{G}$ は零ハット・エネルギー・モードなので，$\hat{G}$ は $\hat{H}$ と可換にできる：

$$[\hat{H}, \hat{G}] = 0. \tag{7.187}$$

これは，ハミルトニアンが，$\hat{G}$ で生成される変換の下に不変であることを意味する ($\hat{G}$ 対称性)。

しかし，真空はこの変換の下に不変ではない：

$$\hat{G}|0(\theta)\rangle \neq 0 \tag{7.188}$$

ないしは

$$\langle 0(\theta)|\hat{G} \neq 0 \tag{7.189}$$

つまり，$\hat{G}$ 対称性が自発的に破れ，$\hat{G}$ は零ハット・エネルギー・モードとして作用する（NG ボソン演算子）ことがわかる。チルダ共役の下での $|0(\theta)\rangle$ の不変性より

$$(\hat{G})^{\sim} = -\hat{G} \tag{7.190}$$

が得られる。

上述のアイデアをまとめると，TFD では熱的自由度は零ハット・エネルギー縮退状態間を動く自由度であり，$\hat{G}$ 対称性の自発的破れはこれらのハット・エネルギー真空の縮退と関連している。これが TFD における熱的自由度の解釈である。この自由度は明らかに量子力学的な孤立系には存在せず，量子場の系が必要となるのである。

この節で示した定式化が TFD[9] の基本形であり，以後の議論の基礎となる。

## 7.4 熱力学的観測量

Heisenberg 表示での力学的観測量に対応する演算子は，非チルダ演算子である。このことより,「チルダ演算子は現実の観測とは無関係の補助的な演算子である」とくり返し述べてきた。チルダ演算子がときにはゴースト演算子と呼ばれたのはこのためである。しかし，すべての観測量が力学量ではないことを思い出すと，この解釈は正しくないことが明らかになる；熱エネルギーやエントロピーなど熱力学的観測量も存在する。

熱力学的観測量は，熱的状態が変化するときに観測される。たとえば，力学的エネルギーに対応する演算子はハミルトニアン $\hat{H}$ ではなく，$H$ である。真

空 $|0(\theta)\rangle$ は $H$ の固有ベクトルではないので，その真空期待値は熱的状態が変わると変化する。別の言い方をすると，力学的エネルギーの期待値は $\theta$ に依存する。このことは，力学的エネルギーが変化すると，集合 $\{|0(\theta)\rangle\}$ 中の一つの要素から他の要素（それらはハット・エネルギーに関して縮退している）へ移動することを意味する。この力学的エネルギーの変化は，エネルギー保存則より熱エネルギーと解釈される。

この議論を具体化するため，内部エネルギー，熱エネルギー，仕事の間に成り立つ熱力学的関係を思い出そう。量子場の孤立系を考えている場合は，外からの仕事は存在しない。内部エネルギーは上に述べた力学的エネルギーである。したがって，

$$d\mathcal{E} = dQ \tag{7.191}$$

を得る。ただし，$\mathcal{E}$ と $Q$ はそれぞれ力学的エネルギー密度と熱エネルギー密度を表わす。これらは $\theta$ に依存するので，$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\theta)$ や $Q(\theta)$ と記すことにする。力学的エネルギーと熱エネルギーの表式を求めるために，ハミルトニアンが

$$\hat{H}_0 = H_0 - \tilde{H}_0 \tag{7.192}$$

で与えられる自由場を考える。ただし，

$$H_0 = \int d^3k\, \omega_k\, a_k^\dagger a_k \tag{7.193}$$

である。この場合，力学的エネルギー密度は

$$\mathcal{E}(\theta)[\delta(\vec{q})]_{\vec{q}=0} = \langle 0(\theta)|H_0|0(\theta)\rangle \tag{7.194}$$

$$= [\delta(\vec{q})]_{\vec{q}=0} \int d^3k\, \omega_k\, n_k(\theta) \tag{7.195}$$

より求められる。$\theta$ が変わると，力学的エネルギー密度の変化は

$$d\mathcal{E}(\theta) = \int d^3k\, \omega_k\, dn_k(\theta) \tag{7.196}$$

で与えられる。エントロピー密度の通常の形

$$S(\theta) = \int d^3k\, [\sigma(1+\sigma n_k(\theta)) \ln(1+\sigma n_k(\theta)) - n_k(\theta) \ln n_k(\theta)] \tag{7.197}$$

を導入すると，

$$dS(\theta) = \int d^3k\, c_k(\theta)\, dn_k(\theta) \tag{7.198}$$

を得る。ただし，$k_B = 1$（$k_B$ は Boltzmann 定数）なる温度の単位を用いている。また，$c_k$ は

$$c_k(\theta) = -\ln f_k(\theta) \tag{7.199}$$

で定義される。$f_k$ は $n_k$ と

$$n_k = \frac{f_k}{1 - \sigma f_k} \tag{7.200}$$

で関連している。温度 $T$ では，$c_k = \beta\omega_k$ （$\beta = 1/T$）である。このとき，(7.191) より，平衡系の熱力学でよく知られた表式

$$dS(\theta) = \frac{dQ(\theta)}{T} \tag{7.201}$$

を得る [10]。次節で見るように，TFD では温度の概念は真空の安定性から生まれる。

まとめると，チルダ自由度は熱力学的観測量を記述するために必要である。このことは,「TFD が，量子場の物理学に熱力学を組み込む方法を提供するのではないか」という希望を与える。しかし，それを達成できるのはまだまだ先のことである。

## 7.5 摂動計算

### 7.5.1 相互作用表示

TFD の体系が与えられたので，今から TFD における摂動計算について調べる。そのためには，Heisenberg 表示と相互作用表示との関係が必要である [2]。

TFD では，Heisenberg 表示における全ハミルトニアン密度

$$\hat{h}_H(x) = h_H(x) - \tilde{h}_H(x) \tag{7.202}$$

から出発する。この演算子を空間積分したものが Heisenberg 表示でのハミルトニアン $\hat{H}_H$ である。以下，添え字 $H$ がついたものは，Heisenberg 表示の量であることを示すものとする。$h_H(x)$ は，自由な部分 $h_{0H}(x)$ と相互作用を表わす部分 $h_{IH}(x)$ の和である：

$$h_H(x) = h_{0H}(x) + h_{IH}(x). \tag{7.203}$$

したがって，自由ハミルトニアン密度と相互作用ハミルトニアン密度はそれぞれ

$$\hat{h}_{0H}(x) = h_{0H}(x) - \tilde{h}_{0H}(x) \tag{7.204}$$

$$\hat{h}_{IH}(x) = h_{IH}(x) - \tilde{h}_{IH}(x) \tag{7.205}$$

で与えられる。

Heisenberg 表示における任意の演算子 $O_H(x)$ と相互作用表示における演算子 $O(x)$ は

$$O_H(x) = \hat{U}^{-1}(t,t_0)\,O(x)\,\hat{U}(t,t_0) \tag{7.206}$$

と

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t,t_0) = -i\hat{H}_I(t)\hat{U}(t,t_0) \tag{7.207}$$

で関連している（添え字 $H$ のついていない量は相互作用表示の量である）。ただし $t = t_x$ である。$\hat{H}_I(t)$ は相互作用表示における相互作用ハミルトニアンである：

$$\hat{H}_I(t) = \int d^3x\,\hat{h}_I(x). \tag{7.208}$$

なお，

$$\hat{h}_I(x) = h_I(x) - \tilde{h}_I(x) \tag{7.209}$$

とおいた。

一方，相互作用表示における自由ハミルトニアンを $\hat{H}_0$ と記す。この自由ハミルトニアンの構造は，自由場 TFD を扱った前節で与えられた：

$$\hat{H}_0 = H_0 - \tilde{H}_0. \tag{7.210}$$

これを用いると，

$$\frac{\partial}{\partial t}O(t) = -i[O(t),\hat{H}_0] \tag{7.211}$$

である。ここでは，Heisenberg 表示と相互作用表示が $t = t_0$ で一致するよう選んでいる：$\hat{U}(t_0,t_0) = 1$．数学的には，$\hat{U}$ 演算子の定義には，たとえば，結合定数に断熱因子を導入するなど，細心の注意が必要である。さもないと，相互作用表示は存在できなくなる。ここではこの点には触れないでおく。

Heisenberg 表示における一体伝播関数は

$$D(x-y) \equiv -i\,{}_H\langle 0(\theta)|T\left[\Phi_H(x)\,\Phi_H(y)\right]|0(\theta)\rangle_H \tag{7.212}$$

で定義される。場 $\Phi_H(x)$ と $\Phi_H(y)$ はチルダ場か非チルダ場のいずれかを表わし，必ずしもどちらかである必要はない。

さて，相互作用表示の演算子を使って (7.212) を書く。$t_0$ で Heisenberg 真空を相互作用真空と一致させて

$$|0(\theta)\rangle_H = |0(t_0,\theta)\rangle \tag{7.213}$$

$${}_H\langle 0(\theta)| = \langle 0(t_0,\theta)| \tag{7.214}$$

とすると，

$$D(x-x') = -i\langle 0(t_0,\theta)|\hat{U}(t_0,\infty)T[\Phi(x)\,\Phi(x')\,\hat{S}]\hat{U}(-\infty,t_0)|0(t_0,\theta)\rangle \quad (7.215)$$

を得る。ただし $\hat{S}$ は

$$\hat{S} = \hat{U}(\infty,-\infty) \quad (7.216)$$

で与えられ，$\hat{S}$ 演算子と呼ばれる。これを入射場と射出場とをつなぐ $S$ 行列演算子と混乱してはならない。なぜなら絶対零度の場合とは異なり，熱的状態では安定した漸近粒子が存在しないからである。このことについては次章で議論する。

通常の場の量子論では，$\hat{U}(t_0,\infty)$ と $\hat{U}(-\infty,t_0)$ を消去するために普通 Gell-Mann-Low 公式を利用し，相互作用表示における時間順序つき伝播関数（Feynman 図による展開が可能）が得られる。しかし，Gell-Mann-Low 公式は熱的状態に対しては必ずしも成立しない可能性があるので，それは使わずに別の方法をとることにする。

Feynman 図法を使うのはその簡便さのためである。$\hat{U}(t_0,\infty)$ と $\hat{U}(-\infty,t_0)$ が消去されない場合にも，遅延あるいは先進伝播関数を使って (7.215) を計算することはできるが，その計算はたいへん厄介なものとなる。したがって，**Gell-Mann-Low の公式を使わずに**時間順序つき法をどこでどのようにして導入することができるか調べるのは有意義なことである。

それを実行するにあたって，$t_0=-\infty$ あるいは $t_0=\infty$ とおくことにする。$t_0$ が特定されたので，熱的真空の引数に $t_0$ は書かない。すると，$t_0=-\infty$ に対しては，

$$D(x-y) = -i\langle 0(\theta)|\hat{S}^{-1}T[\Phi(x)\,\Phi(y)\,\hat{S}]|0(\theta)\rangle \quad (7.217)$$

となり，$t_0=\infty$ に対しては

$$D(x-y) = -i\langle 0(\theta)|T[\Phi(x)\,\Phi(y)\,\hat{S}]\hat{S}^{-1}|0(\theta)\rangle \quad (7.218)$$

となる。

以下では，主に $t_0=-\infty$ の場合を採用する。この場合 $\hat{U}(-\infty,t_0)$ は消える。しかし，(7.217) を見てわかるように，$\hat{S}$ が T 積の外側にあるので，Feynman 図法をまだ使うことはできない。この $\hat{S}$ を消去する方法は二つある。

一つの方法は，$\alpha=1$ を選択することである。7.2.5 節の関係式 (7.112) より，$\alpha=1$ の場合は，

$$\langle 0(\theta)|\hat{H}_I(t) = 0 \quad (7.219)$$

であることがわかり，したがって，$\alpha = 1$ に対して

$$\langle 0(\theta)|\hat{S}^{-1} = \langle 0(\theta)| \tag{7.220}$$

を得る。その結果，Feynman 図法を利用することが可能になる。

7.2.5 節での熱的状態条件より，$\alpha = 0$ の場合は

$$\hat{H}_I(t)|0(\theta)\rangle = 0 \tag{7.221}$$

であることがわかるので，$\alpha = 0$ に対して

$$\hat{S}^{-1}|0(\theta)\rangle = |0(\theta)\rangle \tag{7.222}$$

を得る。これより，$t_0 = \infty$ の場合は $\alpha = 0$ とすれば時間順序つきの表式が得られ，Feynman 図法の利用が可能となる。

**特定の $\alpha$ を使ったこの方法は，数密度 $n_k$ の関数形によらず利用することができる。**

しかし，これは力学的（つまり，非チルダ）演算子の真空期待値が $\alpha$ に依存するという意味ではない。$\alpha$ の値にかかわらず，上で調べた 2 点伝播関数の (11) 成分のような力学的観測量の真空期待値が計算できる。上記の結論は,「一般の $n_k$ に対しては，$\alpha$ の値を適切に選ばないと Feynman 法よりも計算が複雑になる」ということである。しかし，安定な真空の場合には，時間順序つき法（つまり，Feynman 法）が任意の $\alpha$ に対して成立する。次の小節でこれを調べる。

$\hat{S}$ そのものは相互作用の T 積で与えられているので，常に Feynman 図法で計算することができる。しかし，それは力学的演算子ではなく，したがって一般には $\alpha$ に依存する。

### 7.5.2 真空の安定性と温度状態

量子場系の状態は，真空上に作られた Fock 空間に属する。真空以外のすべての状態（準粒子が存在する状態）は励起状態である。熱散逸のためにすべての励起状態は不安定になるが，熱的真空は安定であり得る。

熱力学的状態が定常であっても，必ずしも真空が安定であるというわけではない；真空が定常であるとは，単に $n_k$ が時間に依存しないということを意味するだけである。外界から連続的に粒子が供給されている系を考えてみよう。これは，時間に依存しない一定の粒子数を得るための一つの方法である。この

場合には，外力の影響で個数 $n_k$ は $\vec{k}$ の任意の関数となり得る。これが前の小節の後半で議論した状況である。この場合に真空の安定性を得るためには，注目している系と外界との相互作用も相互作用 $H_{IH}$ に含めて，$\hat{S}$ 演算子を計算する必要がある。外界の影響は通常 c 数場で記述されているので，現在の解析を修正する必要がある。外界を量子場として扱う場合は，注目している系と外界の影響を発するところが異なった位置にあるので，空間並進不変性が失われてしまう。この場合も現在の解析の修正が必要となる。

しかし，外からの粒子供給なしに系が定常性を保つ場合には，熱的状態が定常的であることは真空の安定性を意味する；真空が熱的状態の定常性を保証する。安定な真空がそれ自身の安定性を自己無撞着に保証するので，$n_k$ としては特定の関数形（$\omega_k$ の関数として）だけが許されるはずだ。この解釈は直感的には妥当であるが，それを数学的に裏づける必要がある。

この節ではこの問題を明らかにしよう。まず始めに，いかにして真空の安定性が数学的に定式化できるかを考えてみよう。短時間の測定を行うとエネルギーに不確定さが生じ，あらゆる量子ゆらぎを引き起こす。したがって，通常の場の量子論でよく知られているように，真空の安定性を調べるためには無限時間にわたる測定が必要である。この状況は，熱の影響があっても変わらない。この場合も，真空の安定性は次の関係で表わせる：

$$\hat{S}|0(\theta)\rangle = \hat{S}^{-1}|0(\theta)\rangle = |0(\theta)\rangle \tag{7.223}$$

$$\langle 0(\theta)|\hat{S} = \langle 0(\theta)|\hat{S}^{-1} = \langle 0(\theta)|. \tag{7.224}$$

自己無撞着に定常性が保たれているこの状況では，時間順序つき法（Feynman 図法）が有効であると考えられる。Stückelberg [11] が Feynman 法を導出する際，因果律を保証するためにT積を導入した。因果律の意味するところは,「未来への影響は現時点からの発散波によって与えられ，一方，過去からの影響は現時点に収束する波によって与えられる」である。この Stückelberg の仕事は，同じ原理が自己無撞着に安定な真空に対しても必要であることを示唆している。実際，(7.223)，(7.224) で与えられた安定性の条件は，まさに (7.217)，(7.218) の Green 関数を時間順序つき関数にするための条件である。その結果，Feynman 図法の使用が可能となる。

この考察は任意のパラメータ $\alpha$ に対して適用できるものと推定される。任意の $n_k$ に対して $\alpha = 0$ の場合には (7.223) が成り立ち，$\alpha = 1$ の場合には (7.224) が成り立つので，$\hat{S}$ が $\alpha$ に依存しなければ，たしかにそれは上記の安

定条件を満たしている。そこで，$\hat{S}$ が $\alpha$ に依存しないための条件を探ってみよう。

演算子 $\hat{S}$ に対する定理がただちに得られる [2]。

**定理 1** **真空 $\langle 0(\theta)|$，$|0(\theta)\rangle$ 上の Fock 空間における演算子 $\hat{S}$ の行列要素は，$n_k$ が正準分布 $n_k = f_k/[1-\sigma f_k]$ （$f_k = \exp[-\beta\omega_k]$）で与えられる場合には $\alpha$ に依存しない**

この定理を証明するために，$\hat{S}$ のT積による展開公式

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \, T[\hat{h}_I(x_1) \cdots \hat{h}_I(x_n)] \tag{7.225}$$

を思い出そう。

これはT積だけを含むので，小節 7.2.6 で求めた伝播関数 $\Delta(k)$ を各内線に用いた Feynman 図で与えられる。同じ小節で示したように，2型の自由場は2種類の1型自由場として扱うことができる。したがって，1型の場に対して定理を証明すれば十分である。

証明のための道具立ては，小節 7.2.6 の (7.145) で与えられた関係式である。それは，

$$W_{21}(\omega_k) = f^{\frac{(\alpha_2-\alpha_1)}{2}\tau_3}(\omega_k) \tag{7.226}$$

で与えられる行列 $W_{21}$ によって，$\alpha_2$ の場合の一体伝播関数を $\alpha_1$ の場合の一体伝播関数に変換するものである。

この規則を $\alpha_1$ の場合の Feynman 図に適用すると，$\alpha_2$ の場合の伝播関数に関連して，すべての $\varphi$ には因子 $f^{[(\alpha_2-\alpha_1)/2]}(k_0)$ がかかり，すべての $\varphi^\dagger$ には因子 $f^{[-(\alpha_2-\alpha_1)/2]}(k_0)$ がつく。

相互作用ハミルトニアンには非チルダ場とチルダ場を混合する項が存在しないので，いかなる結節点も非チルダ場とチルダ場を混ぜ合わせることはない。これは，結節点のもつ重要な性質である。

まず，内線のみとつながっている結節点に注目しよう。結節点は二つの $\varphi$ と一つの $\varphi^\dagger$ で構成されていると仮定する。この結節点により，さらに因子

$$F(k_0^1, k_0^2 : k_0^3) = \frac{f^{[(\alpha_2-\alpha_1)/2]}(k_0^1) f^{[(\alpha_2-\alpha_1)/2]}(k_0^2)}{f^{[(\alpha_2-\alpha_1)/2]}(k_0^3)} \tag{7.227}$$

が出る。ただし，$k_0^1$，$k_0^2$ は二つの $\varphi$ に対する $k_0$ であり，$k_0^3$ は $\varphi^\dagger$ に対するものである。この因子は結節点でのエネルギー保存を示す $\delta(k_0^1 + k_0^2 - k_0^3)$ と

ともに現われるので，Feynman 図が $\alpha$ に依存しないためには

$$F(k_0^1, k_0^2 : k_0^3)\delta(k_0^1 + k_0^2 - k_0^3) = \delta(k_0^1 + k_0^2 - k_0^3) \tag{7.228}$$

となることが必要である。これは $f$ が

$$f(k_0) = e^{-\beta k_0} \tag{7.229}$$

の形で与えられることを意味する。ただし，$\beta$ は定数であり，$T \equiv 1/\beta$ は温度とよばれる。この場合，個数

$$n_k = n(k_0) = \frac{f(k_0)}{1 - \sigma f(k_0)} \tag{7.230}$$

は温度 $T$ の熱平衡分布となる。

同じ議論がチルダ場のみの結節点にも適用できる。

次に，結節点につながっている線のうち 1 本が非チルダ外線であるとしよう。小節 7.2.6 により $B_{\alpha_1} = W_{21}^{-1} B_{\alpha_2} W_{21}$ なので，$W_{21}^{-1}$ から内線と同じ因子が出る。$W_{21}$ は行列要素 $\hat{S}$ の因子として現われる。しかし，各行列要素に付随した全エネルギーが保存するので，すべての外線から生じたこの余分な因子は，$f(k_0)$ が上の熱平衡での形をもつ場合には，結節点と同様にして打ち消し合う。これで定理 1 の証明が終了した。

熱平衡状態では $\hat{S}$ は $\alpha$ によらないので，熱平衡での真空は安定であり，すべての多点伝播関数は時間順序つき展開（Feynman 展開）によって与えられる。多点伝播関数に関するこの性質は Feynman 展開を用いて [12] で証明されたが，[2] では Feynman 展開の妥当性が問われたのである。この疑問を調べる過程で $\alpha$ 非依存性の証明が得られた。

まとめると,「任意の $\alpha$ に対して真空が安定であるための十分条件は，$n_k$ が熱平衡分布を満たすことである」ということが示された。この場合には Feynman 図法が任意の $\alpha$ に対して適用できる。特定の $\alpha$ に対して，安定な真空を与える他の形の $n_k$ が存在する可能性もあるが，高次のループ補正の積分が複雑なのを見ると，このことは不可能に思える。真空の安定性から温度を導いた上の議論は，長時間平均と統計平均の同等性を示しているものと考えられる。

$n_k$ が時間によらない場合であっても熱平衡分布の形をもたないときは，$\alpha = 1$ または $\alpha = 0$ 以外では伝播関数の計算には Feynman 図法より複雑な方法が必要となる。これは，時間に依存しない非平衡な状況に対応している。この場合には計算の簡単化のため，$\alpha = 1$ か 0 を選ぶことを推奨する。たとえば [14] に

おいて，TFD の枠組みで非平衡定常状態における Korenman モデル [13] を調べたときは，$\alpha = 1$ とした。

# 参考文献

[1] H. Umezawa and Y. Yamanaka, *Advances in Physics* **37** (1988) 531.
[2] T. S. Evans, I. Hardman, H. Umezawa and Y. Yamanaka, *J. Math. Phys.* **33** (1992) 370.
[3] H. Matsumoto, I. Ojima and H. Umezawa, *Ann. Phys.* **152** (1984) 348.
[4] L. Dolan and R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 3312.
[5] L. Leplae, H. Umezawa and F. Mancini, *Physics Reports* **10C** (1974) 153.
[6] Y. Takahashi and H. Umezawa, *Collect. Phenom.* **2** (1975) 55.
[7] H. Matsumoto, Y. Nakano and H. Umezawa, *Phys. Rev.* **D31** (1985) 429.
[8] H. Umezawa, H. Matsumoto and M. Tachiki, *Thermo Field Dynamics and Condensed States*, (North-Holland, Amsterdam, 1982).
[9] H. Umezawa and Y. Yamanaka, *Phys. Lett.* **155A** (1991) 75.
[10] I. Hardman, H. Umezawa and Y. Yamanaka, *Phys. Lett.* **146A** (1990) 293.
[11] E. C. G. Stueckelberg and T. A. Green, *Helv. Phys. Acta.* **24** (1951) 153.
[12] H. Matsumoto, Y. Nakano and H.Umezawa, *J. Math. Phys.* **25** (1984) 3076.
[13] V. Korenman, *Ann. Phys.* **39** (1969) 1387.
[14] I. Hardman, H. Umezawa and Y. Yamanaka, *Physica* **156A** (1989) 853.

# 8
# 熱平衡 TFD

## 8.1　時間 Fourier 表示

### 8.1.1　$\alpha$ の 選 択

熱平衡 TFD の特徴は，$f_k = f(\omega_k)$ を次のように選ぶところにある：

$$f(\omega_k) = e^{-\beta\omega_k}. \tag{8.1}$$

ただし，準粒子エネルギー $\omega_k$ には相互作用によるくりこみの効果が含まれている。このことについては，後の節でふれる。このエネルギーの定義には，しばしば化学ポテンシャルも含まれる。たとえば超伝導の BCS 理論では，準電子エネルギーは $\omega_k = [\epsilon_k^2 + \Delta^2]^{1/2}$ （$\Delta$ はエネルギー・ギャップ）の形で与えられる；ただし，$\epsilon_k$ は常伝導電子のエネルギーであり，それには化学ポテンシャル $\mu$ が，$\epsilon_k = [(1/2m)|\vec{k}|^2 - \mu]$ のように含まれている。Fermi 運動量 $k_F$ を用いると $\mu = (1/2m)k_F^2$ である。化学ポテンシャルの取り扱いは多体系の細かな性質によるので，本書ではこの問題には触れないことにする。以下，多体理論の場の理論的な側面を調べる。

小節 7.5.2 で見たように，熱平衡状態では真空は $\alpha$ の選択にかかわらず安定であり，また任意の $\alpha$ に対して Feynman 図法が適用できる。

自由場伝播関数の考察から始めよう。それは Feynman 図中の内線である。2

型の自由場では，伝播関数は (7.168) で与えられる：

$$\Delta(k)^{\mu\nu} = B^{-1}(k_0)\frac{i}{(k_0 + i\epsilon_F\tau_3)^2 - \omega_k^2}B(k_0) \tag{8.2}$$

1 型の場に対する伝播関数は，任意の $\alpha$ に対して (7.140) で与えられる：

$$\Delta(k)^{\mu\nu} = [B^{-1}(k_0)\left(\frac{i}{k_0 - \omega_k + i\epsilon_F\tau_3}\right)B(k_0)]^{\mu\nu} \tag{8.3}$$

$$= [B^{-1}(|k_0|)\left(\frac{i}{k_0 - \omega_k + i\epsilon_F\tau_3}\right)B(|k_0|)]^{\mu\nu} \tag{8.4}$$

$\alpha = 1/2$ とすると，TFD はユニタリ表現となり便利である。この表現をとると，通常の場の量子論における演算子法をもっとも継承しやすい。元来 TFD は，[1] に示されているように，この $\alpha$ 値で定式化された。(7.88) より，$\alpha = 1/2$ の場合の Bogoluibov 行列の逆は

$$B_k^{-1}(\theta)^{\mu\nu} = (1+\sigma n_k)^{1/2}\begin{bmatrix} 1 & f_k^{1/2} \\ \sigma f_k^{1/2} & 1 \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

で与えられる。ただし $s_k = 0$ とした。

$\alpha = 1$ には，熱の影響はもっぱらケット真空に含まれるという別の長所がある。これは小節 7.2.5 の熱的状態条件 (7.112) からわかる。それは $\alpha = 1$ の場合

$$\langle 0(\theta)|[A - \tilde{A}^\dagger] = 0 \tag{8.6}$$

となる。これより $\langle 0(\theta)|\hat{H} = 0$ が得られるので，ブラ真空が時間に依存しないことがわかる。ただし，$\hat{H}$ がダガー共役の下に不変であることを用いている。

(7.88) より，$\alpha = 1$ では Bogoluibov 行列のきわめて簡単な表式：

$$B_k^{-1}(\theta)^{\mu\nu} = (1+\sigma n_k)^{1/2}\begin{bmatrix} 1 & f_k \\ \sigma & 1 \end{bmatrix} \tag{8.7}$$

を得る。ここでもまた $s_k = 0$ とした。

最近まで $s_k = 0$ を通常採用してきた。しかし，$(\alpha = 1, s_k = \ln[1+\sigma n_k]^{1/2})$ と選ぶのもきわめて便利であるように思える。その場合

$$B_k = \begin{bmatrix} 1+\sigma n_k & -n_k \\ -\sigma & 1 \end{bmatrix} \tag{8.8}$$

となり，その逆は

$$B_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & n_k \\ \sigma & 1+\sigma n_k \end{bmatrix} \tag{8.9}$$

で与えられるからである。これらの行列は $n_k$ に関して 1 次なので，しばしば計算が簡単になる。次章では，この行列を主に用いる。将来 TFD はこの行列を用いて発展することが予想される。

$\alpha = 1$ か $\alpha = 1/2$ が通常選択されるが，以下の節のすべての議論は $\alpha$ に関係なく進められる。それは，計算の結果得られる物理的観測量は $\alpha$ に依存しないからである。したがって，この章では特に断らないかぎり $\alpha$ の値は任意である。

### 8.1.2 ループにおける積公式

熱平衡状態を考えているので，個数パラメータは正準形で与えられる：

$$n(\omega_k) = \frac{f(\omega_k)}{1-\sigma f(\omega_k)} \tag{8.10}$$

ただし，

$$f(\omega_k) = e^{-\beta\omega_k} \tag{8.11}$$

である。

この場合，次の積公式を得る：

$$\begin{aligned} -i\int \frac{dl_0}{2\pi}&\left[\tau_3 B_{\sigma_1}^{-1}(\kappa_+)\left(l_0+\frac{k_0}{2}-\kappa_+ + i\epsilon_F\tau_3\right)^{-1} B_{\sigma_1}(\kappa_+)\right]^{\mu\nu} \\ &\times\left[B_{\sigma_2}^{-1}(\kappa_-)\left(l_0-\frac{k_0}{2}-\kappa_- + i\epsilon_F\tau_3)\right)^{-1} B_{\sigma_2}(\kappa_-)\right]^{\nu\mu} \\ &= \int d\kappa\rho(\kappa:\kappa_+,\kappa_-)[B_{\sigma_1\sigma_2}^{-1}(\kappa)(k_0-\kappa+i\epsilon_F\tau_3)^{-1}B_{\sigma_1\sigma_2}(\kappa)]^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{8.12}$$

ただし，

$$\rho(\kappa:\kappa_+,\kappa_-) = \delta(\kappa-\kappa_+ + \kappa_-)\sigma[n(\kappa_+)-n(\kappa_-)] \tag{8.13}$$

である。なお，$B(\kappa)$ と $n(\kappa)$ は，$B(\omega_k)$ と $n(\omega_k)$ の $\omega_k$ を $\kappa$ で置き換えたものである。$B_\sigma$ の添え字 $\sigma$ は $\pm$ を意味する； $B_+$ はボソン場に対する $B$ を

意味し，$B_-$ はフェルミオン場に対する $B$ である。したがって，この積公式には，ボソンとフェルミオン線のすべての組合せが含まれている。

**問 1** 上の積公式を導け。
ヒント：前節で議論した $\alpha$ の変換規則を用いて，この公式が任意の $\alpha$ に対して成立することを証明せよ。その上で $\alpha = 1$ や $\alpha = 1/2$ などの特定の $\alpha$ を選ぶ。たとえば，$\alpha = 1/2$ とせよ。これ以上ヒントはない；各 $\mu\nu$ に対して単に左辺を計算せよ。

この積公式より，2 本の Feynman 線で構成されているループ図は，自由伝播関数をエネルギー・パラメータに関して積分することにより重ね合わせた形をしていることがわかる。2 点伝播関数が，この形の重ね合せで与えられているとき，それは 2 点伝播関数のスペクトル表示と呼ばれる。上の積公式より，このループ図はスペクトル表示をもっていることがわかる。

この積公式を導出してみると，個数分布が熱平衡分布でない場合にはこの公式は成立しないことがわかる。これよりスペクトル表示には，温度の存在が必要であることがわかる。$n(\omega_k)$ が熱平衡分布であることは，相互作用の影響を受けた任意の 2 点伝播関数がスペクトル表示をもつための十分条件であることも証明される。これについては次の小節で議論する。

(8.12) の量で与えられる 1 ループ自己エネルギーを考えよう。この場合，$\kappa_+$ と $\kappa_-$ はそれぞれ $[\vec{k}+(\vec{l}/2)]$ と $[\vec{k}-(\vec{l}/2)]$ の関数である。ただし，$\vec{k}$ と $\vec{l}$ はそれぞれ外線の運動量と相対運動量である。この場合での (8.12) の量を $\sigma_1(k_0, \vec{k} : \vec{l})$ と記す；添え字 1 は 1 ループを意味する。すると，1 ループ自己エネルギー $\Sigma_1(k_0, \vec{k})$ は

$$\Sigma_1(k_0, \vec{k}) = \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \sigma_1(k_0, \vec{k} : \vec{l}) \tag{8.14}$$

で与えられる。

その虚数部分は，

$$\Im \Sigma_1(k_0, \vec{k}) = -i\pi \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \rho(k_0 : \kappa_+, \kappa_-) A(k_0) \tag{8.15}$$

である。ただし，

$$A(k_0) = B^{-1}(k_0) \tau_3 B(k_0) \tag{8.16}$$

とおいた。なお，$B$ は $B_{\sigma_1 \sigma_2}$ を意味する。

**問 2** 1 ループ自己エネルギーのこの虚数部分を求めよ。
ヒント：公式

$$\frac{1}{\omega \pm i\epsilon_F} = \frac{\mathcal{P}}{\omega} \mp i\pi\delta(\omega) \tag{8.17}$$

を利用せよ。

殻上自己エネルギーは $\Re\Sigma_1(\omega_k,\vec{k})$ で与えられる。内部運動量 $\vec{l}$ のいくつかの値に対して条件 $\omega_k=\kappa_+-\kappa_-$ が満たされるとき，殻上自己エネルギーの虚数部分 $\Im\Sigma_1(\omega_k,\vec{k})$ は消えない。この場合には準粒子は不安定になる。この条件はしばしば成立する。この不安定性の原因は，チルダ粒子が負のハット・エネルギーをもつことにある。

これは，準粒子が，正のハット・エネルギーをもつ非チルダ粒子と負のハット・エネルギーをもつチルダ粒子に緩和することを意味している。次節では，場の相互作用が存在する場合には，すべての準粒子が不安定であることを示す。

### 8.1.3　スペクトル表示

この小節では，すべての相互作用の影響を考慮した 2 点伝播関数に対するスペクトル表示を導く。使われるのは小節 7.2.5 の熱的状態条件である。

熱平衡状態では熱的状態条件は

$$[A(x)-e^{\beta\alpha\hat{H}}\tilde{A}^\dagger(x)]|0(\theta)\rangle=0 \tag{8.18}$$

$$\langle 0(\theta)|[A(x)-\tilde{A}^\dagger(x)e^{(1-\alpha)\beta\hat{H}}]=0 \tag{8.19}$$

で与えられる。$\alpha=1/2$ として考察を行う。結果は任意の $\alpha$ に拡張できる。

$A(x)$ の Fourier 変換を行おう：

$$A(x)=\int d\kappa A(\vec{x},\kappa)e^{-i\kappa t} \tag{8.20}$$

$$\tilde{A}(x)=\int d\kappa\tilde{A}(\vec{x},\kappa)e^{i\kappa t}. \tag{8.21}$$

ただし，チルダ共役則を用いた。

$\hat{H}$ は時間並進の生成子であるから，

$$[A(\vec{x},\kappa),\hat{H}]=\kappa A(\vec{x},\kappa) \tag{8.22}$$

となり，任意の c 数 $c$ に対して

$$e^{c\hat{H}}A(\vec{x},\kappa)e^{-c\hat{H}}=e^{-c\kappa}A(\vec{x},\kappa) \tag{8.23}$$

を得る。

これにより，上の熱的状態条件は

$$[A(\vec{x},\kappa) - e^{-\frac{1}{2}\beta\kappa}\tilde{A}^\dagger(\vec{x},\kappa)]|0(\theta)\rangle = 0 \tag{8.24}$$

$$\langle 0(\theta)|[A^\dagger(\vec{x},\kappa) - e^{-\frac{1}{2}\beta\kappa}\tilde{A}(\vec{x},\kappa)] = 0 \tag{8.25}$$

となる。ただし，$\langle 0(\theta)|\hat{H} = \hat{H}|0(\theta)\rangle = 0$ を用いた。

さて，

$$\Xi_A(\vec{x}:\kappa) = (1+\sigma n(\kappa))^{1/2}\left[A(\vec{x},\kappa) - e^{-\frac{1}{2}\beta\kappa}\tilde{A}^\dagger(\vec{x},\kappa)\right] \tag{8.26}$$

を定義すると，

$$\Xi_A^\dagger(\vec{x}:\kappa) = (1+\sigma n(\kappa))^{1/2}\left[A^\dagger(\vec{x},\kappa) - e^{-\frac{1}{2}\beta\kappa}\tilde{A}(\vec{x},\kappa)\right] \tag{8.27}$$

を得る。ただし，$n(\kappa)$ は個数パラメータであり，$n(\kappa) = f(\kappa)/[1-\sigma f(\kappa)]$ を通して $f(\kappa) = \exp[-\beta\kappa]$ と関連している。

これは

$$\Xi_A(\vec{x}:\kappa)|0(\theta)\rangle = 0 \tag{8.28}$$

$$\langle 0(\theta)|\Xi_A^\dagger(\vec{x}:\kappa) = 0 \tag{8.29}$$

を満たす。これらのチルダ共役をとると

$$\tilde{\Xi}_A(\vec{x}:\kappa)|0(\theta)\rangle = 0 \tag{8.30}$$

$$\langle 0(\theta)|\tilde{\Xi}_A^\dagger(\vec{x}:\kappa) = 0 \tag{8.31}$$

が得られる。これらの関係より，$\Xi_A$ と $\tilde{\Xi}_A$ は消滅演算子のように作用し，$\Xi_A^\dagger$ と $\tilde{\Xi}_A^\dagger$ は生成演算子として作用することがわかる。ただし，これらは振動子演算子ではない。これらを対角的熱的状態条件と呼ぶ。

熱的二重項表記 $\Xi_A(\vec{x}:\kappa)^\mu$ と $\bar{\Xi}_B(\vec{x}:\kappa)^\mu$ を導入する。ただし，$\Xi_B$ は $\Xi_A$ において $A$ を $B$ で置き換えたものであることを意味する。熱的二重項表記は以前に定義したものと同じである：$\Xi^1 = \Xi, \Xi^2 = \tilde{\Xi}^\dagger, \bar{\Xi}^1 = \Xi^\dagger, \bar{\Xi}^2 = -\sigma\tilde{\Xi}$. $A$ に対する熱的二重項表記も導入する： $A^1 = A$, $A^2 = \tilde{A}^\dagger, \bar{A}^1 = A^\dagger, \bar{A}^2 = -\sigma\tilde{A}$.

この表記を用いると

$$A(\vec{x},\kappa)^\mu = B^{-1}(\kappa)^{\mu\nu}\Xi_A(\vec{x},\kappa)^\nu \tag{8.32}$$

$$\bar{A}(\vec{x},\kappa)^\mu = \bar{\Xi}_A(\vec{x},\kappa)^\nu B(\kappa)^{\nu\mu} \tag{8.33}$$

を得る。ただし $B(\kappa)$ は，$n(\kappa)$ で与えられる個数パラメータに依存する Bogoluibov 行列である。

**問 3** 次の公式を導け：

$$\begin{aligned}&\langle 0(\theta)|T[\Xi_A(\vec{x},\kappa)^\mu \bar{\Xi}_B(\vec{y},\kappa)^\nu]|0(\theta)\rangle \\ &= \rho(\vec{x}-\vec{y},\kappa)\begin{bmatrix}\theta(t_x-t_y) & 0 \\ 0 & -\theta(t_y-t_x)\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{8.34}$$

ただし

$$\rho(\vec{x}-\vec{y},\kappa) \equiv \langle 0(\theta)|\Xi_A(\vec{x},\kappa)\Xi_B^\dagger(\vec{y},\kappa)|0(\theta)\rangle \tag{8.35}$$

である。

ヒント：上記の熱的二重項と対角的熱的状態条件を用いよ。関係

$$\langle 0(\theta)|\Xi_A(\vec{x},\kappa)\Xi_B^\dagger(\vec{y},\kappa)|0(\theta)\rangle = \langle 0(\theta)|\tilde{\Xi}_B(\vec{y},\kappa)\tilde{\Xi}_A^\dagger(\vec{x},\kappa)|0(\theta)\rangle \tag{8.36}$$

も必要である。これは，ダガー共役とチルダ共役をとることによって得られる。

さて，関係式

$$\theta(t_x-t_y)e^{-i\kappa(t_x-t_y)} = i\int\frac{dk_0}{2\pi}e^{-ik_0(t_x-t_y)}\frac{1}{k_0-\kappa+i\epsilon_F} \tag{8.37}$$

$$\theta(t_y-t_x)e^{-i\kappa(t_x-t_y)} = -i\int\frac{dk_0}{2\pi}e^{-ik_0(t_x-t_y)}\frac{1}{k_0-\kappa-i\epsilon_F} \tag{8.38}$$

を思い出そう。

伝播関数を

$$D_{AB}(x-y)^{\mu\nu} \equiv -i\langle 0(\theta)|T[A(x)^\mu \bar{B}(y)^\nu]|0(\theta)\rangle \tag{8.39}$$

で定義する。(8.32)，(8.33) で与えられたように，$A^\mu$ （ $B^\mu$ ）が $\Xi_A^\mu$ （ $\Xi_B^\mu$ ）と Bogoluibov 変換で関連していることを思い出すと，この伝播関数の Fourier 振幅はスペクトル表示をもつことがわかる [1]：

$$D_{AB}(k)^{\mu\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa\rho_k(\kappa)\left[B^{-1}(\kappa)\frac{1}{k_0-\kappa+i\epsilon\tau_3}B(\kappa)\right]^{\mu\nu} \tag{8.40}$$

ただし，$\rho_k(\kappa)$ は $\rho(\vec{x}-\vec{y}:\kappa)$ の Fourier 成分である。これはスペクトル関数と呼ばれる。

スペクトル表示のこの導出において，熱平衡条件 $f(\kappa)=\exp[-\beta\kappa]$ は決定的な役割を演じた。これより，スペクトル表示の存在する必要十分条件は，個数パラメータが熱平衡分布で与えられる場合であることがわかる。熱平衡 TFD にスペクトル表示が存在することは Feynman 図の計算をする上でたいへん役に立つ。

ここでのスペクトル表示の導出では $\alpha = 1/2$ を用いたが，スペクトル表示は任意の $\alpha$ に対して成立する。

$A = B = \psi$ のとき，この伝播関数を $D_c(k)$ と記そう。これは相互作用効果の補正を受けた $\psi$ 場の伝播関数である。さて，Dyson 方程式

$$D_c = -i\Delta_c + (-i\Delta_c)\Sigma D_c \tag{8.41}$$

を思い出そう。ただし，$\Sigma(k)$ は自己エネルギー項であり，$\Delta_c$ は自由場伝播関数である。

伝播関数にはスペクトル表示 (8.40) があるので，自己エネルギー部分も同様のスペクトル形式を与える：

$$\Sigma(k_0, \vec{k} : \beta)^{\mu\nu} = \int d\kappa\, \sigma_k(\kappa) \left[B^{-1}(\kappa)\frac{1}{k_0 - \kappa + i\epsilon\tau_3}B(\kappa)\right]^{\mu\nu} \tag{8.42}$$

自己エネルギーのスペクトル関数 $\sigma_k$ と伝播関数 (8.40) のスペクトル関数 $\rho_k$ は

$$\rho_k(\kappa) = \frac{\sigma_k(\kappa)}{\{\kappa - \omega_k - r_k(\kappa)\}^2 + \pi^2\sigma_k^2(\kappa)} \tag{8.43}$$

で関連している。ただし

$$r_k(\kappa) = \int d\nu\, \mathcal{P}\frac{\sigma_k(\nu)}{\kappa - \nu} \tag{8.44}$$

である。なお，$r_k(k_0)$ は自己エネルギーの実部である：

$$r_k(k_0) = \Re\left[\Sigma\left(k_0, \vec{k} : \beta\right)\right]. \tag{8.45}$$

殻上自己エネルギー $\delta\omega_k(\beta)$ は，$\Sigma$ の実部において $k_0 = \omega_k(\beta)$ とおいて得られる：

$$\delta\omega_k(\beta) = r_k(\omega_k(\beta)). \tag{8.46}$$

通常 $\omega_k$ をくりこまれた準粒子エネルギーとおくので，相互作用ハミルトニアンにはエネルギー・カウンター項が含まれ，エネルギー・シフトは消える：

$$\delta\omega_k(\beta) = 0. \tag{8.47}$$

$\delta\omega_k(\beta)$ は $\omega_k$ の関数なので，この式は $\omega_k$ を決めるための準粒子エネルギー方程式である。この状況は，通常の場の量子論におけるエネルギーくりこみと同様である。

$k_0 = \omega_k(\beta)$ における $\Sigma$ の虚数部は準粒子の散逸項を与える。(8.42) より次の散逸項が得られる：

$$\Im\left[\Sigma\left(k_0 = \omega_k(\beta), \vec{k} : \beta\right)\right] = -i\kappa_k(\beta)A(\omega_k(\beta)). \tag{8.48}$$

ただし，

$$\kappa_k(\beta) = \pi\sigma_k(\omega_k(\beta)) \tag{8.49}$$

であり

$$A(\omega_k) = B^{-1}(\omega_k(\beta))\tau_3 B(\omega_k(\beta)) \tag{8.50}$$

である。チルダ場は負のハット・エネルギーをもつので，なんらかの相互作用が存在する場合には，ループ展開の高次項の寄与は常に $\kappa$ が消えない方向に働く。したがって，熱散逸のためすべての準粒子は不安定となる [2, 3]。TFD が通常の場の量子論と大きく異なるのは，このことによる。

自己エネルギー項を自由ハミルトニアンに加えると

$$\hat{H}_{prop} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{dis} \tag{8.51}$$

を得る。ただし，$\hat{H}_0$ は自由ハミルトニアン

$$\hat{H}_0 = \int d^3k\omega_k(\beta)[a_k^\dagger a_k - \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k] \tag{8.52}$$

$$= \int d^3k\omega_k(\beta)\bar{a}_k a_k + \text{c-数} \tag{8.53}$$

$$= \int d^3k\omega_k(\beta)\bar{\xi}_k \xi_k + \text{c-数} \tag{8.54}$$

であり，また

$$\hat{H}_{dis} = -i\int d^3k\, \kappa_k(\beta)\bar{a}_k A(\omega_k(\beta))a_k \tag{8.55}$$

$$= -i\int d^3k\, \kappa_k(\beta)\bar{\xi}_k(\beta)\tau_3\xi_k(\beta) \tag{8.56}$$

である。

$\hat{H}_{prop}$ は有効ハミルトニアンであり，$k_0 = \omega_k(\beta)$ における伝播関数 $D_c(k)$ の伝播の仕方を制御する [2, 3]。なお，$\hat{H}_{prop}$ は $\xi$ 演算子に関して対角的であり，これより Bogoluibov 変換によって $\hat{H}_{prop}$ が対角化されることがわかる。

準粒子の散逸はいくつかの本質的な疑問を提示する。第一の疑問は，励起の熱的不安定性の起源に関するものである。外界へ向かう正味の散逸エネルギー

流が存在する場合には，その起源は明らかである。しかし，この節の考察でわかるように，励起の散逸は相互作用している孤立量子場系でも起きる。系に励起を導入すると，相互作用によって系は熱平衡状態に戻り，その励起のエネルギーが失われるように見える。これが散逸ということばの由来である。もちろんエネルギーは実際には失われていない。量子場の系は無限個の自由度を有する無限系であるので，熱平衡状態を変えることなく有限のエネルギー変化を消化できるのである。これはちょうど，励起の波束が無限に薄くなりながら全空間に広がり，最終的には励起のエネルギーは事実上系からなくなる状況と同じである。これが相互作用している孤立量子場系が熱浴なしに散逸する理由である。これが可能なのは，散逸過程により励起エネルギーが熱エネルギーに変換され，それが空間に広がって最後には失われるからである。

第二は,「熱の影響を考慮すると，準粒子描像はどのように変更されるべきか」という疑問である。不安定粒子は連続エネルギー・スペクトルをもつので，Landsman は，非摂動ハミルトニアンが連続エネルギーをもつ自由ハミルトニアンの和で与えられるとして理論を定式化した [5, 6]。この体系での摂動計算は (8.40) に与えられたものと同様の結果をもたらす。このアプローチには触れない。簡単のため，自由準粒子がエネルギー $\omega_k(\beta)$ をもつとして話を進める。熱的自由度のない通常の場の量子論では，準粒子は漸近粒子であり，非摂動ハミルトニアンとハミルトニアンのダイナミカルマップは通常，漸近粒子の自由ハミルトニアンである。TFD では準粒子は熱的に不安定なので，準粒子が漸近粒子となり得ないことは明らかである。実際 [7] で示されたように，漸近粒子の存在を仮定し，入射粒子と射出粒子とを結ぶ S 行列を導入すると，S 行列は単位行列となってしまう。つまり，準粒子は漸近粒子でないのである。

散逸しない自由準粒子を採用し，3 章と同様の議論（そこでは，真空の時空並進不変性を基礎にしている）を適用すると，$\hat{H}$ のダイナミカルマップは $\hat{H}_0$ となることがわかる。熱平衡 TFD ではこの不変性が成り立つので，$\hat{H}$ のダイナミカルマップは $\hat{H}_0$ と主張できる。しかしその証明には，エネルギー $\omega_k$ をもった散逸のない自由準粒子の採用が基礎となっていることに注意せよ。次の小節では $\hat{H}$ と $\hat{H}_0$ のこの同等性を用いて久保-Martin-Schwinger 関係を導く。

第三の疑問は，以下のものである：非摂動ハミルトニアンは自由ハミルトニアン $\hat{H}_0$ であろうか，あるいは散逸的ハミルトニアン $\hat{H}_{prop}$ であろうか。本書の哲学では，非摂動ハミルトニアンとして $\hat{H}_0$ を使うべきである。しかし，このアプローチはいつもうまくいくわけではない。散逸の影響が摂動的に扱えな

い場合は，非摂動ハミルトニアンとして $\hat{H}_{prop}$ を採用してみるべきであろう [4]。

$\hat{H}_{prop}$ を非摂動ハミルトニアンとして採用することが，「準粒子が自由な場合には，ハミルトニアンのダイナミカルマップは $\hat{H}_0$ である」ということと，どのように折り合いがついているのかという疑問は微妙な問題である。この疑問に答えるため，(8.90) にある Bogoluibov 行列の一般形を思い出し，散逸の影響は，以前採用したパラメータ $s_k$ の値に $\kappa_k t$ を加えてできる新しい Bogoluibov 変換によって取り扱えることを示そう。つまり，散逸的 Bogoluibov 行列

$$B_{k,dis}(t) = e^{\kappa_k t \tau_3} B_k \tag{8.57}$$

を導入する。ただし，$B_k$ は今まで使ってきた散逸のない Bogoluibov 行列である。これより，新しい Bogoluibov 変換は

$$a_k(t)^\mu = B^{-1}_{k,dis}(t)^{\mu\nu} \xi_k(t)^\nu \tag{8.58}$$

$$\bar{a}_k(t)^\mu = \bar{\xi}_k(t)^\nu B_{k,dis}(t)^{\nu\mu} \tag{8.59}$$

となる。ただし，

$$\xi_k(t)^\mu = e^{-i\omega_k t} \xi^\mu_k \tag{8.60}$$

$$\bar{\xi}_k(t)^\mu = e^{i\omega_k t} \bar{\xi}^\mu_k \tag{8.61}$$

とおいた。これより

$$[\frac{d}{dt} + i\omega_k + \kappa_k A_k] a_k(t) = 0 \tag{8.62}$$

を得る。ただし，行列

$$A_k = B^{-1}_{k,dis}(t) \tau_3 B_{k,dis}(t) \tag{8.63}$$

$$= B^{-1}_k \tau_3 B_k \tag{8.64}$$

を導入した。$B_{k,dis}(t)$ は時間に依存するが $A_k$ は時間に依存しないことに注意せよ： $s_k$ を変えても $A$ 行列は変更を受けない。上記の方程式は，この場のハミルトニアンが散逸的ハミルトニアン $\hat{H}_{prop} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{dis}$ であることを示している。しかし，準粒子演算子 $\xi_k(t)$ が散逸のない方程式

$$[\frac{d}{dt} + i\omega_k] \xi_k(t) = 0 \tag{8.65}$$

を満たしていることは，準粒子は自由のままであることを意味する。ここで重要なことは，散逸は準粒子演算子に付随しているのではなく $a_k$ 演算子に付随

しているのである：Bogoluibov 行列に時間依存性を導入したことが $a_k$ 演算子の方程式を変更したのである。9 章では時間に依存した TFD を議論するが，そこで同じ状況に出会う。この議論は，本書で $k_0=\omega_k$ の殻上条件を採用していることを正当化するように思える。TFD での散逸粒子に対する殻上条件の問題は議論の余地がある。

QED ホット・プラズマ中の荷電フェルミオンに対する散逸係数 $\kappa_k$ の摂動計算で，自由非摂動ハミルトニアンを採用すると赤外発散が起きることが知られている。このことは，この場合の散逸の影響が摂動的でないことを示唆している。これは，$e^2\ln[1/e]$（$e$ ：電子の電荷）の項を含む Pisarski の結果 [8] と一致している。しかし，この問題に非摂動ハミルトニアンとして $\hat{H}_{prop}$ を採用することは，まだ試みられていない。

厳密に解ける Thirring モデルを扱った，散逸準粒子の興味深い研究がある。それによると，有限温度では一体伝播関数には特異な分布をした複素極特異性がある [9]。しかしこの著者らは，この特異性の原因はこのモデルが絶対零度において非摂動的であることによるものではないかと考えている。

この小節を終わるにあたって，次のコメントをしておく。外界へ流れ出る正味の散逸エネルギーが存在する過渡的な系を扱う際には，非摂動ハミルトニアンとして $\hat{H}_{prop}$ を採用するのは有効である。

### 8.1.4　粒子数と個数パラメータ

これまでは，粒子数パラメータを熱的 Bogoluibov 変換に現われるもので定義してきた。それは相互作用表示で定義された粒子数である：

$$n(\omega_k)\delta(\vec{k}-\vec{l}) = \langle 0(\theta)|a_k^\dagger a_l|0(\theta)\rangle. \tag{8.66}$$

しかし，観測される個数は Heisenberg 表示の個数演算子の期待値で与えられるべきである：

$$n_{Hk}\delta(\vec{k}-\vec{l}) \equiv \langle 0(\theta)|a_{Hk}^\dagger a_{Hl}|0(\theta)\rangle. \tag{8.67}$$

ただし，添え字 $H$ は Heisenberg 演算子を意味する。この量は補正された一体伝播関数 $D_c(t-t')^{\mu\nu}$ の (11) 成分において，極限 $t\to t'$ をとったものである。したがって，$n_{Hk}$ はスペクトル表示 (8.40) を前の小節で得られた $D_c$ に適用することによって得られる。結果は

$$n_{Hk} = \int d\kappa\, \rho_k(\kappa) n(\kappa) \tag{8.68}$$

となる。(8.43) より，スペクトル関数 $\rho_k$ は $\kappa = \omega_k$ にピークをもち，幅 $\kappa_k(\beta)$ の関数である。つまり，観測される個数分布は Boltzmann 分布 $n_k$ のまわりに $\kappa_k(\beta)$ 程度のゆらぎをもっているのである。

### 8.1.5 久保-Martin-Schwinger 条件

この小節では，真空期待値中の二つの演算子を入れ替える際の規則を導く：

$$\langle 0(\theta)|A(t)B(t')|0(\theta)\rangle = \langle 0(\theta)|B(t')A(t+i\beta)|0(\theta)\rangle. \tag{8.69}$$

この関係は久保-Martin-Schwinger (KMS) 条件と呼ばれる [10, 11]。

TFD ではこの関係の導出は熱的状態条件に基づいて行われる [12, 1]。熱的状態条件の導出には $\hat{H}$ が弱い関係で $\hat{H}_0$ と等しいことを仮定した。

$\hat{H}$ は時間並進を生成するので，(8.18) と (8.19) の熱的状態条件は

$$[A(t) - \tilde{A}^\dagger(t - i\alpha\beta)]|0(\theta)\rangle = 0 \tag{8.70}$$

$$\langle 0(\theta)|[A(t) - \tilde{A}^\dagger(t - i(1-\alpha)\beta)] = 0 \tag{8.71}$$

のように書き直せる。

次のように計算を進める：

$$\begin{aligned}\langle 0(\theta)|A(t)B(t')|0(\theta)\rangle &= \langle 0(\theta)|\tilde{A}^\dagger(t + i[1-\alpha]\beta)B(t')|0(\theta)\rangle \\ &= \langle 0(\theta)|B(t')\tilde{A}^\dagger(t + i[1-\alpha]\beta)|0(\theta)\rangle \\ &= \langle 0(\theta)|B(t')A(t+i\beta)|0(\theta)\rangle.\end{aligned} \tag{8.72}$$

KMS 条件の導出はこれで完了した。統計力学では，この関係はアンサンブル平均におけるトレース公式を用いて導かれる [10, 11]。C*代数ではこの条件は公理であった。TFD ではこの条件は熱的状態条件の結果として得られる。熱的状態条件は，ハミルトニアン $\hat{H}$ の構造とチルダ共役則より得られる。

### 8.1.6 自由エネルギー

TFD は真空期待値と熱平均 $Tr[A\rho]/Tr[\rho]$ の同等性から生まれた。しかし，自由エネルギー $F$ は

$$F = -\beta^{-1} \ln Tr[\exp[-\beta H]] \tag{8.73}$$

で与えられるので，真空期待値の形では書けない。そこで TFD の体系で自由エネルギーを得るためには技巧を要する。

力学的ハミルトニアンは自由部分と相互作用部分からなる：

$$H = H_0 + H_I. \tag{8.74}$$

ここで，実 c 数パラメータ $s$ に依存した

$$H(s) = H_0 + sH_I \tag{8.75}$$

を導入し

$$F(s) = -\beta^{-1} \ln Tr[\exp[-\beta H(s)]] \tag{8.76}$$

を定義する。これより

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{Tr[e^{-\beta H(s)} H_I]}{Tr[e^{-\beta H(s)}]} \tag{8.77}$$

を得るが，これは TFD では

$$\frac{d}{ds}F(s) = \langle 0(\beta, s)| \, H_I \, |0(\beta, s)\rangle \tag{8.78}$$

と表わせる。ただし，$|0(\beta, s)\rangle$ はハミルトニアン $H(s)$ に付随した温度 $\beta^{-1}$ での熱的真空である。この式を積分すると $F = F(1)$ として

$$F = F(0) + \int_0^1 ds \, \langle 0(\beta, s)| \, H_I \, |0(\beta, s)\rangle \tag{8.79}$$

を得る。これは Heisenberg 表示での表式である。

相互作用表示では

$$F = F(0) + \int_0^1 ds \, \langle 0(\beta)| \, T[H_I(t_0) \, \hat{S}] \, |0(\beta)\rangle \tag{8.80}$$

となる。ただし，前章で与えた摂動計算の定式化で用いた記法を利用している。$|0(\beta)\rangle$ は，相互作用表示における温度 $\beta^{-1}$ での熱的真空である。これが TFD 法で自由エネルギー $F$ を計算する方法である [13]。

### 8.1.7 対称性の自発的破れ

5 章で，絶対零度における対称性（秩序の生成）の破れを調べた。6 章では，真空への粒子の凝縮により，量子力学的自由度をもった巨視的物体がいかにして生成されるかを知った。TFD では有限温度になっても，この解釈にいかなる

変更も加える必要がない。実際，この二つの章で扱った問題（絶対零度での計算）は，TFD を用いれば自然に有限温度へ拡張される。有限温度での解析を系統的な形で定式化する際，TFD のこの特徴はしばしば効力を発揮する。

絶対零度の系がある種の対称性を自発的に破り，それにともなった NG 粒子をともなう解をもつとき，有限温度においても同一の対称性の破れによって NG 粒子が生成される。ただしその場合，NG 粒子のエネルギー・スペクトルは温度に依存する。5 章で見たように，絶対零度では，NG 粒子はいかなる反応にも寄与しない。有限温度に対しても同様の証明が成り立つ。しかし，有限の運動量をもつ NG 粒子は熱的に不安定である。したがって，NG 粒子が安定なのは絶対零度のときだけである。

対称性が再構成される構造や Ward-高橋の関係は，有限温度でも変更なしに成立する [1]。もっとも，そこに現われるすべての行列要素が温度に依存するようにはなる。

したがって，有限温度になったからといって，自発的対称性の破れや巨視的物体の生成の考察になんら変更の必要はない。ここで強調しておきたいことは，「ふつう相転移は有限温度で起こるわけで，熱的自由度を取り入れたおかげで，秩序状態や巨視的物体，相転移の話が現実的なものになった」ということである。現実に即して自発的対称性の破れを議論するためには，有限温度の効果を考慮しなければならないのである。このように考えを進めてくると，時間に依存した熱の問題に自然と行き着く。これは発展段階の主題であり，次章でざっと触れることにする。

### 8.1.8 熱的な対称性の破れ

ほんの少し熱の影響を受けただけで破壊される対称性もある。よく知られたものとして，有限温度での相対論的モデルにおける Lorentz 対称性がある。他の例として，有限温度における超対称性の破れがある。

統計力学では，Lorentz 対称性の破れは，熱浴に関する静止系の存在に起因すると解釈されている。しかし TFD では，熱浴も系の一部として取り込むこともできる。つまり，孤立系を扱うことになる。この扱いでは，Lorentz 対称性の破れは自発的な対称性の破れとしてとらえられる [14, 15]。

超対称性の場合には，対称性の破れの原因はボソンとフェルミオンの個数分布のずれにある；このずれのためボソン-フェルミオン対称性が破れるのである。この場合も自発的に対称性が破れている [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]。

これらの対称性の破れは，熱的な対称性の破れと呼ばれる [15]。

熱的な対称性の破れの特徴は,「相互作用がなくても破れが起こる」ということである。ところで南部-Goldstone 定理によると，自発的に対称性が破れるときには必ず零エネルギー準位が現われるはずである。TFD におけるハミルトニアンは $H$ ではなく $\hat{H}$ なので，NG 定理が要求しているのは，零エネルギー状態ではなく零ハット・エネルギー状態である。そこで,「相互作用がないのに，どのようにしてこれらの NG モードが生成されるのか？」という疑問がわいてくる。この疑問に答えるには，3 章にある定理（熱的自由度のない通常の場の量子論によるもの）を思い出すとよい；それによると，不変対称変換を誘起する生成子が時間に依存しないときには，その生成子のダイナミカルマップは $\xi_k^\dagger \xi_k$ とエネルギーに飛びのない場に関する 1 次の項で構成されている。TFD ではこの定理は変更を必要とする；チルダ粒子は負のハット・エネルギーをもつので，$\xi_k \tilde{\xi}_k$ の形の項とそのダガー共役の項は零ハット・エネルギーをもち，したがって，これらの項も時間に依存しない生成子のダイナミカルマップに寄与することが許される。熱的な Lorentz 対称性の破れの場合には，これらは NG モードとなっている [15]。

相互作用のない超対称性のモデルにおける熱的な対称性の破れでは，これらの項は $\xi_k^F \tilde{\xi}_k^B$，$\xi_k^B \tilde{\xi}_k^F$ とそのダガー共役で与えられる。ただし，上つき添字 $B$ と $F$ は，それぞれボソンとフェルミオンを示す。これらの項は零ハット・エネルギーをもつフェルミオン・モードであり，ゴールドスティノの役目を果たしている [24]。相互作用があるときには，超対称性が破れると通常フェルミオンとボソンのエネルギーの間に差が生じ，上記の項は零ハット・エネルギーではなくなる。この場合には，このフェルミオン・ペアは本来のゴールドスティノに置き換わる [20, 25]。

### 8.1.9　熱現象を扱う場の量子論

熱現象を扱う場の量子論の体系はいくつかある。この節では，それらと TFD との関係を簡単にまとめる（熱現象を扱う場の量子論一般に関する記述は，[26] の論文を見よ。最近の発展については，第 1 回 [27] および第 2 回 [28]『熱現象を扱う場の量子論とその応用』国際ワークショップのプロシーディングスに紹介されている)。

**C*代数の方法：**

熱平衡物理学に対する代数理論が C*代数の枠組みの中で定式化されている

[29, 30]。そこでは，Gibbs 状態は C*代数に属する演算子の期待値汎関数 $\omega(A)$ によって与えられる。この熱理論では，KMS 条件も基礎的公理として扱われる。熱平衡状態に対応する熱的状態条件下の TFD と C*代数による方法との同等性は，小嶋によって証明された [31]。将来，非平衡状態へ拡張する際，C*代数の体系が利用できるかは不明である。本書では，C*代数によるその拡張は取り扱わない；TFD の枠組みでその拡張を図る。

**Liouville 方程式と超演算子の体系：**

統計力学の基礎は二つの関係式にまとめられるだろう。一つは Liouville 方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\rho = [H, \rho] \tag{8.81}$$

であり，もう一つは 2.4 で議論したトレース公式：

$$\langle A\rangle = Tr[\rho A]/Tr[\rho] \tag{8.82}$$

である。$\rho$ は密度行列である。超演算子の体系は，Liouville 方程式を Schrödinger 方程式の形にするために発展した。密度行列はベクトル空間中のベクトルとして扱われ，そのベクトルに作用する演算子は二通りの演算が可能である；一つは $\rho$ の左側から $A\rho$ のように作用する演算，もう一つは $\rho$ の右側から $\rho A$ のように作用する演算である。後者は，左側から作用する演算 $\tilde{A}\rho$ として書き直せる。こうしてすべての自由度は倍化される：演算子 $A$ には，そのチルダ共役 $\tilde{A}$ が随伴する。倍化された演算子は，しばしば超演算子と呼ばれる [32, 33]。超演算子の体系と TFD との対応は [34, 2, 3, 35, 36] で明らかにされた。$\alpha$ 自由度は，その対応関係の解析中に Schmutz によって初めて発見された [34]。上の議論より

$$[H, \rho] = (H - \tilde{H})\rho \tag{8.83}$$

を得る。これより，見慣れた TFD ハミルトニアン $\hat{H}$ の形が得られる：$\hat{H} = H - \tilde{H}$.

議論を明確にするために，$[a, a^\dagger] = 1$ を満たす自由振動子 $(a, a^\dagger)$ を考えよう。2.4 節で行ったように密度行列を

$$\rho = f^{a^\dagger a} \tag{8.84}$$

の形に書く。

$|m\rangle$ を，$a^\dagger a$ の固有値 $m$ に属する固有ベクトルとする。この状態を用いると

密度行列は

$$\rho = \sum_m |m\rangle f^m \langle m| \tag{8.85}$$

と表わせる。これより

$$[H, \rho] = \sum_m [\ H|m\rangle f^m \langle m| - |m\rangle f^m \langle m|H\ ] \tag{8.86}$$

を得る。TFD に移るために置き換え [35]：

$$|m\rangle\langle m| \to |m\tilde{m}\rangle \tag{8.87}$$

を行う。この置き換えにより，右側からの演算が左側からの演算となる。

これを見ると，TFD ハミルトニアンの構造 $\hat{H} = H - \tilde{H}$ は，統計力学における Liouville 演算子と密接に関連していることがわかる。TFD ではこのハミルトニアンの構造は熱的真空の不変性から得られたことを想起せよ。

**経路順序つき（Path Ordered）法：**

熱現象を扱う実時間 Green 関数に基づいたもっとも普及している方法は，閉じた時間経路法や Schwinger-Keldysch (SK) 法と呼ばれているものである [37, 38, 39, 40, 41, 42]。

この方法は，本質的に演算子形式の体系である TFD （そこでも伝播関数を導くことができる）と対照的である。TFD における摂動計算法と SK 法におけるそれとの間の同等性は，[43, 44] で初めて指摘された。

SK 法は，一般的な経路順序つき法（POM）の特別な場合にあたる [45]。POM では，熱平衡状態での多点伝播関数は

$$\langle T_c[\psi_H(x_1)\cdots\psi_H(x_n)\rangle = \frac{\langle\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)\exp\left(-i\int_c dzH_I(z)\right)\rangle}{\langle T_c\exp\left(-i\int_c dzH_I(z)\right)\rangle} \tag{8.88}$$

で与えられている。ただし，$T_c$ は複素時間平面において $t_-$ から $t_- - i\beta$ への経路に沿ってとられた順序つき積である；その経路は，

$$\begin{aligned} t_- &\to t_+ \to t_+ - i(1-\alpha)\beta \\ &\to t_- - i(1-\alpha)\beta \to t_- - i\beta \end{aligned} \tag{8.89}$$

であり，図 2 に示されている。

無限に離れた領域からの相互作用の影響がない場合には，(8.88) 右辺の分母と分子にある縦の経路からの寄与の部分は打ち消しあう。その場合，実軸に沿っ

た二つの経路からのみの寄与が残る；1本は実軸の上側を進み，もう1本は実軸の下側 $(1-\alpha)\beta$ の距離のところを戻る。$\psi$ のうち，実軸より上にあるものを $\psi^1$，実軸より下にあるものを $\psi_2$ と記すことにすると，成分が倍化されたことになる。このため，POM における2点伝播関数は2行2列の行列となる [37, 38, 46]。上記の $\alpha$ を TFD における $\alpha$ パラメータとみなせば，これは TFD における2点伝播関数と同一であることがわかる。熱平衡系の TFD においては，物理的な観測量は $\alpha$ に依存しないことを思い出してほしい。したがって，熱平衡状態を考えるならば，POM においても観測量は $\alpha$ によらない。**TFD と POM とのこの類似性は，Green 関数のみにかぎられる**ことに注意せよ；TFD ではチルダ場と非チルダ場は交換あるいは反交換するが，POM では実軸の上側にある経路上の演算子と下側にある経路上の演算子は交換あるいは反交換しない。TFD の体系の本質的な部分は，POM のものとはまったく異なっている。

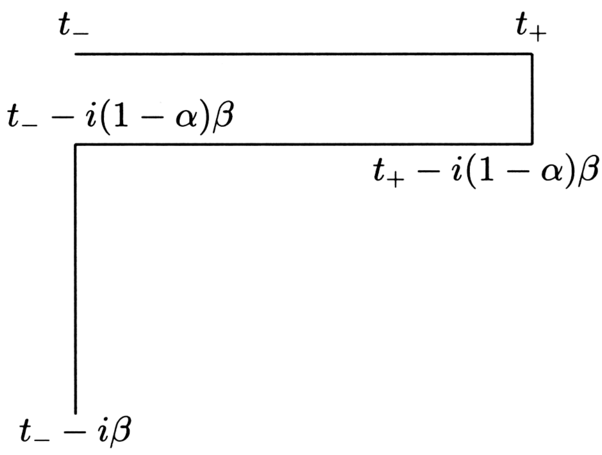



図 2. (8.89) の経路

TFD を知っていた Semenoff は，後に Niemi との共同研究で有効ポテンシャル法を POM によって定式化した [47]。これは $\alpha = 1/2$-POM を導いた最初の論文である。

TFD では $\alpha = 1$ か $\alpha = 1/2$ が特に便利であることを発見した。SK 法では

$\alpha = 1$ が使われてきた。この方法は，実軸をはさんだ閉じた経路を用いるので，閉じた経路法（CPF）と呼ばれる。CPF には長い歴史がある。初期の発展の詳しい解説は Kadanoff と Baym の著書 [41] にある。[48] の論文も一読に値する。この方法の原子核物理学への応用は多い；たとえば，[49, 50] を見よ。プラズマ物理学への応用 [51]，天体物理学や宇宙論への応用 [52] など，CPF を用いた論文は数えきれない。Kadanoff-Baym 法と TFD との密接な関連は，有光によって明らかにされた [53]。

CPF による散逸準粒子の定式化は TFD によるものと同一の重要な問題を提起しているが，この問題はまだ論議の余地がある（たとえば [54] を見よ）。CPF は非平衡の問題に対する有効な方法と考えられており，Korenman によるモデル計算 [55] がよく知られている。Korenman モデルは TFD でも扱われた [56]。

**虚 時 間 法：**

これまで紹介した方法では実時間を用い，温度は付加的パラメータとして導入されている。一方，虚時間法では虚数時間が温度とみなされる。この体系は松原 [57] によって始められ，物理学の多くの領域で今なおもっとも普及した方法である。熱現象を扱う場の量子論の歴史においてこの体系がもつもっとも重要な意味は，熱現象を扱う場の量子論のすべてがここから始まったという点である。この方法の導出は，さほど難しいものではない。1955 年頃，時間並進の演算子 $\exp[iHt]$ に対する摂動計算法がさかんに研究されていた。虚時間法では時間 $t$ を $i\beta$ で置き換え，熱平衡状態での密度行列演算子 $\exp[-\beta H]$ の行列要素を得た。これは上述の経路順序つき法において $t_- = t_+ = 0$ に対応し，その経路は虚数時間軸に沿って零と $-i\beta$ を結んだものである。通常の場の理論と虚時間法の大きな違いは次の点にある。通常の場の理論においては時間は $-\infty$ から $\infty$ にわたるすべての領域に広がっているが，虚時間法では有限の虚数領域しか使わない。したがって，虚時間法においても Fourier 表現での Feynman 展開が可能か否かは自明ではなかった。この疑問は，まったく独立に [58] と [59] の二つの論文で解決された。これにより，Feynman 図法を用いた虚時間法の実質的な応用が始まったのである。Fourier 空間では松原振動数と呼ばれる離散的なエネルギーの和がとられる。松原振動数はこの二つの論文で発見された。この二つの論文の関係は [58] の脚注に述べられている。虚時間法の初期の発展に関しては，江沢による詳しい解説がある [60]。Feynman 図法を導出するには，Wick 積に対する規則が必要であるが，虚時間法におけるその規則の完全な証明は [61] でなされた。Bloch ら [62] は，[59] によって示唆された温度 Green 関

数理論の発展に大きく貢献した。

虚時間法には限界がある。虚時間法から実時間法に移るには解析接続が必要であるが，その際無理な技巧を要する場合がある。また，虚時間法は熱平衡状態に限られた Green 関数法である。

**TFD の応用：**

TFD の建設は，他の実時間法の発展と平行して多くの物理学者によってなされてきた。TFD の応用は精力的になされてきたので，重要な寄与だけにかぎっても本書で紹介することは不可能である。2 モード・スクイーズド状態の研究に，TFD はその基礎的手法として多くの物理学者によって利用された（本書の２，３章を見よ）。同様の応用は，パラメトリック増幅器の研究においてもなされた。これらの TFD の応用に関しては [63, 64, 65] を見よ。原子核物理学の分野では温度の概念が重要であり，TFD は何人かの研究者によって利用されてきた。特に，[66] や他の論文でなされた，巨大共鳴を乱雑位相近似 (RPA) で扱う問題への TFD の応用からわかるように，TFD における RPA では，各ループが一つの関数ではなく四つの関数で構成された 2×2 行列であるため，虚時間法よりも多くの情報をもたらす。

原子核物理学では各種の正準変換が施されるので，演算子法である TFD の有効性が発揮されている。これはたとえば，最近発展した TFD における Hatree-Fock 法を見るとわかる [67, 68, 69]。ある確率分布に関して平均をとる必要があるときはいつでも，TFD の手法が役立つ。これは，スピングラスの問題に対する動的な方法の発展を見るとわかる [70, 71, 72, 73]。統計力学の多くの領域で有効な手法の発展が，TFD に基づいて鈴木によりなされた（たとえば，[74] を見よ）。これらは TFD の応用のほんの一部の例である。

TFD（および，実時間法一般）における摂動計算に関する多くの技術的な発展があるが，ここではそのうちのほんの一部を紹介するに留める。虚数部や緩和率は，Kobes と Semenoff [75, 76] の方法で求められる。同様の問題は Danielewicz[77] や牲川 [78] によっても考察された。時間順序つきや遅延等の各種の Green 関数間の関係が，Evans[79] と Kobes[80, 81] によって議論されている。自由エネルギーや有効ポテンシャルは，たいへん有用な量である。これらは，精力的に調べられてきた。たとえば，藤本らの仕事 [82, 83, 84] を見よ。

TFD を用いて，有限温度におけるストリングやスーパー・ストリングも何人かの物理学者によって研究されている [85, 86, 87, 88, 89, 90]。

応用に関するより完全な紹介は，Cleveland（1988 年）とつくば（1990 年）

で開催された国際会議『熱現象を扱う場の量子論とその応用』のプロシーディングスを見よ [27, 28]。

**温度と微視的世界：**

原子核物理では温度の概念がよく使われる。そこでの議論によると，核子の数が多い場合は粗視化された量しか観測されず，粗視化の過程で温度が導入されるのである。しかし，小節 6.5.3 で説明したように原子核は孤立系をなし，したがって核子を閉じこめている境界面は自己無撞着に生成される。したがって，厳密には孤立系の熱理論が必要になる。こう考えを進めてくると，熱現象を扱う場の量子論にたどりつく。従来は，密度行列に基づいた統計力学や虚時間法がもっともよく使われてきた。最近は経路順序つき法と TFD も普及してきた。そのいくつかは TFD の応用を議論したところで触れた。ほとんどすべての応用は，熱平衡状態に対する理論を用いている。しかし，核衝突過程を通じて熱の状態が時間に依存することは明らかである。微視的な粒子の反応に対するそのような熱理論を定式化することは，おおいにやりがいがある。

「核反応のような微視的粒子の反応を扱う際に，熱の影響を考慮しなければならない」という観点を認めると，それは当然高エネルギー粒子の衝突をも含むものとなるべきである。高エネルギー粒子物理学に温度を導入するというアイデアは 1950 年頃に現われた。ことの始まりは，$10^{11}$ eV を越える高エネルギー領域（当時ではこれでもたいへん高いエネルギーと考えられた）での核衝突によるメソンの多重発生であった。この現象に対する統計理論の新しい流行が，Fermi [91, 92] と Landau [93, 94] の仕事によって始まった。この種の現象には多数の粒子が関与するので，各粒子の振舞いを別々に記述することは難しく，ある種の統計平均をとることが必要となる。Fermi は,「高エネルギー核子の衝突によって，ある領域（それは，衝突核子の速度が大きいために起きた Lorentz 収縮のため円盤状である）に閉じこめられた高温のメソン-核子でできたスープが発生するのだろう」と仮定した。彼はこの系を統計力学的手法で扱うことを提案した。Landau はそれに加えて，円盤がその垂直方向に広がっていく流体力学的ステージを導入した。この膨張により冷却され，最終段階の粒子が現われる。この問題を解くためには，メソン-核子のスープに対する状態方程式が必要である。このスープが極端に熱い理想気体であると仮定して，状態方程式 $p=\epsilon/3$ が使われた。ただし $p$ と $\epsilon$ は，それぞれ圧力とエネルギー密度である。この状態方程式に対する相互作用の影響を調べるために，[59] の著者は相互作用している量子場モデルに虚時間法を適用した。これは，熱現象を扱

う場の量子論を高エネルギー粒子反応に応用した初めての仕事である。この複雑な過程による熱的変化の時間依存性を記述するのはたいへん難しいので，この系の状態は近似的に熱平衡状態（温度で指定された）にあると仮定された。この仕事には，熱現象を扱う場の理論のいくつかの観点が含まれていた。第一に，エネルギー積分を離散的振動数（現在では，松原振動数と呼ばれている）に関する和に置き換えれば，Feynman 図法の Fourier 表現が使える。次に，モデルが絶対零度でくりこみ可能（すべての紫外発散がくりこみの手続きにより消去できるという意味で）な場合は，それは有限温度でもくりこみ可能である（これは，小節 7.2.6 の終わりで説明された）。

このアイデアは現在 QCD 物理学に継承されている。そこでは，高温高圧下のハドロンで構成された物体は，自由なグルーオンとクォークでできた熱い気体プラズマへ相転移を起こすと考えられている。ここでもまた，多くの計算は熱平衡状態の範囲にかぎられている [95, 96, 97, 98, 99, 100]。これは活発に発展している研究であり，その十分な参考文献を載せることはできない。たとえば,『クォーク物質会議』[101, 102] のプロシーディングスを見よ。なお，この題材も，孤立系で起こる粒子反応の熱現象にかかわるものであり，時間に依存した熱理論による正確な記述が要求されるものである。

同様の線に沿ったアプローチは，初期宇宙の進化に関する研究のようなまったく異なった題材にも応用されている。この題材も，孤立系の熱現象における時間依存性にかかわる問題である。参考文献は，たとえば,『熱現象を扱う場の量子論とその応用』国際会議のプロシーディングス [27, 28] にある。

**温度とくりこみ群：**

くりこみ群の手法 [103, 104] は，物理量の漸近的振舞いを解析するのに効力を発揮する方法であり，物理学の多くの領域で応用されてきた。もっとも成功した応用として深部非弾性（deep inelastic）散乱の解析（例として，[105] を見よ）や相転移における臨界現象の解析 [106] が挙げられる。

くりこみ群法の伝統的な形式ではエネルギー-運動量の尺度を変える；温度の影響は現象論的に扱われる。しかし，温度とエネルギー-運動量の双方を別々にスケールする方が，論理的に一貫した形で力学的振舞いと温度に依存する振舞いを扱うことができる。この種の手法は温度くりこみ群法と呼ばれ，そこでは一つではなく二つのパラメータに依存する Abel 群が扱われる。この方法とその応用に関する詳しい説明は，たとえば [107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114] を見よ。

## 8.2　t 表示

### 8.2.1　はじめに

この章でここまでになされた話は，熱平衡系 TFD として広く認められた形式である。しかし,「短時間の間には準粒子はどんな熱的状態にあるのか」という疑問がわいてくる。量子論では，あらゆる種類の量子状態が短時間のゆらぎとして存在する。それならば，TFD ではこのゆらぎの中に熱的状態も含まれるものと考えるのが自然である。もし 2 粒子状態に対して上記の疑問に答えられたとしたら，高エネルギー重イオン衝突においてクォーク・グルーオン・プラズマが生じるか否かを知ることになる。この節では上記の疑問を 1 粒子に対して調べる。今まで採用してきた Fourier 表示は，この目的には向いていない；準粒子の時間発展を知りたいので，その Fourier 共役よりもむしろ時間表示で扱わなければならない。これを t 表示と呼ぶことにする [115]。

### 8.2.2　準　　備

t 表示の準備としてこの小節では，いくつかの便利な関係を導入する [115]。(7.86) より，Bogoluibov 行列の一般形は

$$B_k(\theta)^{\mu\nu} = (1+\sigma n_k)^{1/2} e^{s_k \tau_3} \begin{bmatrix} 1 & -f_k^{\alpha} \\ -\sigma f_k^{1-\alpha} & 1 \end{bmatrix} \tag{8.90}$$

で与えられる。ただし，$\sigma$ は，ボソンに対しては正，フェルミオンに対しては負である。$f_k$ は

$$f_k = \frac{n_k}{1+\sigma n_k} \tag{8.91}$$

であり，これより $n_k = f_k/[1-\sigma f_k]$ を得る。$\alpha_k$ として $\vec{k}$ に依存しないものを選び，それを $\alpha$ と記す。上の行列の逆は

$$B_k^{-1}(\theta)^{\mu\nu} = (1+\sigma n_k)^{1/2} \begin{bmatrix} 1 & f_k^{\alpha} \\ \sigma f_k^{1-\alpha} & 1 \end{bmatrix} e^{-s_k \tau_3} \tag{8.92}$$

である。

Feynman 図法を利用するために，$\alpha = 1$ とする。8.1.1 節で見たように，パラメータ $s_k$ を

$$s_k = \ln\,[1+\sigma n_k]^{1/2} \tag{8.93}$$

とおくと

$$e^{s_k \tau_3} = \begin{bmatrix} [1+\sigma n_k]^{1/2} & 0 \\ 0 & [1+\sigma n_k]^{-1/2} \end{bmatrix} \tag{8.94}$$

が得られ，Bogoluibov 行列の形はさらに簡単化される。つまり，Bogoluibov 行列 (8.90) は簡単な形

$$B_k = \begin{bmatrix} 1+\sigma n_k & -n_k \\ -\sigma & 1 \end{bmatrix} \tag{8.95}$$

となり。その逆行列は

$$B_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & n_k \\ \sigma & 1+\sigma n_k \end{bmatrix} \tag{8.96}$$

となる。

簡単な行列計算により

$$\frac{1+\tau_3}{2} B_k(t) = \frac{1+\tau_3}{2} + \sigma n_k(t)(T_0 + T_-) \tag{8.97}$$

$$B_k^{-1}(t) \frac{1+\tau_3}{2} = T_+ \tag{8.98}$$

$$\frac{1-\tau_3}{2} B_k(t) = T_- \tag{8.99}$$

$$B_k^{-1}(t) \frac{1-\tau_3}{2} = \frac{1-\tau_3}{2} - \sigma n_k(t)(T_0 - T_+) \tag{8.100}$$

を得る。ただし，記法

$$T_0 = \begin{bmatrix} 1 & -\sigma \\ \sigma & -1 \end{bmatrix} \tag{8.101}$$

$$T_+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 0 \end{bmatrix} \tag{8.102}$$

$$T_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\sigma & 1 \end{bmatrix} \tag{8.103}$$

を導入した。

三つの行列 $T_\pm$，$T_0$ は，実際の計算で基本的役割を果たす。これらの行列はいくつかの簡単な代数的関係を満たす。それらは

$$T_0^2 = 0 \tag{8.104}$$

$$T_+^2 = T_+ \tag{8.105}$$

$$T_-^2 = T_- \tag{8.106}$$

$$T_+T_0 = T_0T_- = T_0 \tag{8.107}$$

$$T_0T_+ = T_-T_0 = T_+T_- = T_-T_+ = 0 \tag{8.108}$$

$$T_+ + T_- = 1 \tag{8.109}$$

である。

これらの関係を用いると

$$B^{-1}(n^1)\frac{1+\tau_3}{2}B(n^2) = T_+ + \sigma n^2 T_0 \tag{8.110}$$

$$B^{-1}(n^1)\frac{1-\tau_3}{2}B(n^2) = T_- - \sigma n^1 T_0 \tag{8.111}$$

$$A(n) \equiv B^{-1}(n)\tau_3 B(n) = T_+ - T_- + 2nT_0 \tag{8.112}$$

を簡単に示すことができる。ただし，$B(n)$ は個数パラメータ $n$ の Bogoluibov 行列である。上記の公式を用いると次の関係が得られる：

$$B^{-1}(N^1)\begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix} B(N^2) = (g_1T_+ + g_2T_-) + \sigma(g_1N_k^2 - g_2N_k^1)T_0. \tag{8.113}$$

この小節の公式は伝播関数の計算に利用される。

### 8.2.3 一体伝播関数

この章のここまでの節で，熱平衡 TFD では相互作用による補正を受けた一体伝播関数が，(8.40) で与えられるスペクトル表示をもつことを見てきた。Heisenberg 表示の振動子演算子 $a_{kH}(t)^\mu$，$\bar{a}_{Hk}(t)^\mu$ に関する一体伝播関数を

$$D_k(t-t')^{\mu\nu} = \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0(t-t')} D_k(k_0)^{\mu\nu} \tag{8.114}$$

と書くと，スペクトル表示

$$D_k(k_0)^{\mu\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \left[ B^{-1}[n(\kappa)] \frac{\rho(\kappa, \vec{k})}{k_0 - \kappa + i\epsilon\tau_3} B[n(\kappa)] \right]^{\mu\nu} \tag{8.115}$$

を得る。ただし，$n(\kappa)$ は温度 $\beta^{-1}$ の Boltzmann 分布

$$n(\kappa) = \frac{1}{e^{\beta\kappa} - 1} \tag{8.116}$$

で与えられる。なお，$\kappa = \omega_k$ での $n(\kappa)$ は，非摂動伝播関数中の $B$ 行列にある数密度パラメータである。関数 $\rho$ がスペクトル関数である。$a_{kH}(t)^\mu$，$\bar{a}_{Hk}(t)^\mu$ に対する同時刻振動子交換関係より

$$\int d\kappa\, \rho(\kappa, \vec{k}\,) = 1 \tag{8.117}$$

を得る。(8.115) を (8.114) に代入し $k_0$に関する積分を行うと

$$D_k(t-t')^{\mu\nu} = \int d\kappa\, \Big[B^{-1}[n(\kappa)] \times \begin{bmatrix} -i\theta(t-t') & 0 \\ 0 & i\theta(t'-t) \end{bmatrix} e^{-i\kappa(t-t')}\rho(\kappa,\vec{k})B[n(\kappa)]\Big]^{\mu\nu} \tag{8.118}$$

が得られる。

これを (8.113) の形に展開し，その上で $\kappa$ 積分を行う。結果は

$$D_k(t-t')^{\mu\nu} = B^{-1}[N_k(t-t')]^{\mu\mu'} \times \int d\kappa\, e^{-i\kappa(t-t')}\rho(\kappa,\vec{k}) \begin{bmatrix} -i\theta(t-t') & 0 \\ 0 & i\theta(t'-t) \end{bmatrix}^{\mu'\nu'} B[N_k(t-t')]^{\nu'\nu} \tag{8.119}$$

のように，Bogoluibov 変換の形に再びまとめ上げることができる [115]。ただし，

$$N_k(t-t') = \frac{\int d\kappa\, e^{-i\kappa(t-t')}\rho(\kappa,\vec{k}\,)n(\kappa)}{\int d\kappa\, e^{-i\kappa(t-t')}\rho(\kappa,\vec{k}\,)} \tag{8.120}$$

$$= N_{R,k} + \nu_k(t-t') \tag{8.121}$$

である。なお

$$N_{R,k} \equiv N_k(0) = \int d\kappa\, \rho(\kappa,\vec{k}\,)n(\kappa) \tag{8.122}$$

とおいた。$\nu_k(t-t')$ は

$$\nu_k(t-t') = N_k(t-t') - N_{R,k} \tag{8.123}$$

で定義される。これは

$$\nu_k(t-t'=0) = 0 \tag{8.124}$$

を満たす。

$$n_{Hk}\delta(\vec{k}-\vec{l}) = \langle 0|a^{\dagger}_{Hk}a_{Hl}|0\rangle \tag{8.125}$$

で定義される Heisenberg 表示の数密度 $n_{Hk}$ を思い出すと，重要な結果が得られる。$t \geq t'$ または $t' \geq t$ に対して極限 $t \to t'$ をとると

$$N_{R,k} = n_{H,k} \tag{8.126}$$

を得る。ただし，(8.117) を用いた。これより，$N_{R,k}$ は正しい数密度であることがわかる。補正された Bogoluibov 個数パラメータ $N_k(t-t')$ とこの正しい数密度との差 $\nu_k(t-t')$ は，個数ゆらぎと呼ばれる。

熱平衡 TFD における上記の結果の物理的意味は簡単に理解できる [115]。それは，Heisenberg 表示の数密度を非摂動数密度で表わした (8.122) に示されている。それを調べるために，小節 8.1.3 の (8.42) で与えられた自己エネルギーのスペクトル表示を思い出そう：

$$\Sigma(k_0,\vec{k}\,)^{\mu\nu} = \int d\kappa\,\sigma(\kappa,\vec{k}\,)\left[B^{-1}[n(\kappa)]\frac{1}{k_0-\kappa+i\epsilon\tau_3}B[n(\kappa)]\right]^{\mu\nu}. \tag{8.127}$$

そこで議論したように，殻上 $k_0=\omega_k$ における $\Sigma$ の実部と虚部は，それぞれエネルギー・シフトと散逸を表わしている：

$$\begin{aligned}\delta\omega_k &= \Re\left[\Sigma\left(k_0=\omega_k,\vec{k}\right)\right]\\ &= r(\kappa=\omega_k,\vec{k}\,)\end{aligned} \tag{8.128}$$

$$\Im\left[\Sigma\left(k_0=\omega_k,\vec{k}\right)\right] = -i\kappa_k B^{-1}[n(\omega_k)]\tau_3 B[n(\omega_k)] \tag{8.129}$$

ただし，

$$r(\kappa,\vec{k}\,) = \int d\kappa'\,\mathcal{P}\frac{\sigma(\kappa',\vec{k}\,)}{\kappa-\kappa'} \tag{8.130}$$

であり，

$$\kappa_k = \pi\sigma(\omega_k,\vec{k}\,) \tag{8.131}$$

で与えられる $\kappa_k$ は散逸係数と呼ばれる。非摂動エネルギー $\omega_k$ はくりこまれたエネルギーとしているので，$\delta\omega_k = 0$ である。

スペクトル関数 $\rho$ はスペクトル関数 $\sigma$ と

$$\rho(\kappa,\vec{k}\,) = \frac{\sigma(\kappa,\vec{k}\,)}{(w-\omega_k)^2+\pi^2\sigma^2(\kappa,\vec{k}\,)} \tag{8.132}$$

$$\simeq \frac{1}{\pi}\frac{\kappa_k}{\{w-\omega_k\}^2+\kappa_k^2} \tag{8.133}$$

で関連している。最後の近似的表式は，$\sigma(\kappa,\vec{k})$ と $r(\kappa,\vec{k})$ をその殻上の値に置き換えて得られる。$\kappa_k$ が非常に小さいときは，$\rho$ は $\kappa=\omega_k$ に鋭いピークをもつ。その場合は，(8.122) と (8.126) より，非摂動の個数 $n(\omega_k)$ が $n_{H,k}$ のよい近似になっていることがわかる。熱の影響が重要になると（$\kappa_k$ の値が大きくなると）$n_{H,k}$ の $n(\omega_k)$ からのずれは増大する。このずれは，熱的不安定性により引き起こされたエネルギー不確定性の増大に起因する。結局，相互作用のため量子ゆらぎとともに熱ゆらぎが誘起され，$n(\omega_k)$ が $n_{H,k}$ に変形するのである。

この節の結果 [115] より，熱平衡状態においても，準粒子はその伝播中に，時間に依存した熱ゆらぎ $\nu_k(t-t')$ を感じていることがわかる。

同様にして２粒子状態も，t 表示における時間に依存した熱ゆらぎを感じるのであろう。時間に依存したこのゆらぎが，高エネルギー粒子反応における短時間の熱の影響とどのような関係にあるかは，興味深い問題である。

t 表示法は，時空に依存した熱過程に対して有用な描像を提供する。このことは次章の主題である。

## 参 考 文 献


[1] H. Umezawa, H. Matsumoto and M. Tachiki, *Thermo Field Dynamics and Condensed States*, (North-Holland, Amsterdam, 1982).

[2] T. Arimitsu and H. Umezawa, *Prog. of Theor. Phys.* **74** (1985) 429.

[3] T. Arimitsu and H. Umezawa, *Prog. of Theor. Phys.* **77** (1987) 53.

[4] I. Hardman and H. Umezawa, *Annals of Phys.* **203** (1990) 173.

[5] N. P. Landsman, *Phys. Rev. Lett* **60** (1988) 1909.

[6] N. P. Landsman, *Ann. Phys.* **186** (1989) 141.

[7] H. Narnhofer, M. Requardt and W. Thirring, *Commun. Math. Phys.* **92** (1983) 247.

[8] R. D. Pisarski, *Nucl. Phys.* **B309** (1988) 476.

[9] N. Ashida, A. Niegawa, H. Nakkagawa and H. Yokota, *Physics Lett.* **B236** (1990) 450.

[10] R. Kubo, *J. Phys. Soc. Japan* **12** (1957) 570.

[11] P. Martin and J. Schwinger, *Phys. Rev.* **115** (1959) 1342.

[12] Y. Takahashi and H. Umezawa, *Collect. Phenom.* **2** (1975) 55.

[13] H. Matsumoto, Y. Nakano and H. Umezawa, *Phys. Rev.* **D31** (1985) 1495.

[14] I. Ojima, In K. Kikkawa, N. Nakanishi and H. Hariai, editors, *Proceeding of the Conference on Gauge Theory and Gravitation at Nara Japan*, Lecture

Notes in Physics 176, (Springer, Berlin, 1983).

[15] H. Matsumoto, H. Umezawa, N. Yamamoto and N. J. Papastamatiou, *Phys. Rev.* **D34** (1986) 3217.

[16] A. Das, In Kowarsky, N. P. Landsman and Ch.G van Weert, editors, *Workshops on Thermal Quantum Field Theories*, *Physica* **158A** (1988) 1.

[17] A. Das and M. Kaku, *Phys. Rev.* **D18** (1978) 4540.

[18] K. Teshima, *Phys. Lett.* **123B** (1983) 226.

[19] D. Boyanovsky, *Phys. Rev.* **D29** (1984) 743.

[20] H. Aoyama and D. Boyanovsky, *Phys. Rev.* **D30** (1985) 467.

[21] S. Midorikawa, *Prog. Theor. Phys.* **73** (1985) 1245.

[22] L. Girardello, M. Grisaru and P. Salamonson, *Nucl. Phys.* **B178** (1981) 331.

[23] L. Van Hove, *Nucl. Phys.* **B207** (1982) 15.

[24] K. Matsumoto, M. Nakahara, Y. Nakano and H. Umezawa, *Physica* **15D** (1985) 163.

[25] Y. Leblanc and H. Umezawa, *Phys. Rev.* **D33** (1986) 2288.

[26] N. P. Landsman and Ch. G. van Weert, *Phys. Reports* **145** (1987) 141.

[27] K. L. Kowalsky, N. P. Landsman and Ch. G. van Weert, editors, *Workshop on Thermal Quantum Field Theories and Their Applications*, *Physica* **158A** (1988) 1.

[28] H. Ezawa, T. Arimitsu and Hashimoto, editors, *Thermal Field Theories*, (North-Holland, Amsterdam, 1991).

[29] H. Araki and E. J. Woods, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 637.

[30] R. Haag, N. W. Hugenholtz and M. Winnink, *Comm. Math. Phys.* **5** (1967) 215.

[31] I. Ojima, *Ann. Phys.* **137** (1981) 1.

[32] U. Fano, *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957) 74.

[33] J.A. Crawford, *Nuovo Cim.* **10** (1958) 698.

[34] Z. Schmutz, *Z. Phys.* **B30** (1978) 97.

[35] S.Chaturvedi and V. Srinivasan, Operator methods for master equations in quantum optics, *Preprint* (1989).

[36] P.A.Henning, Ch. Becker, A. Lang and U. Winkler, *Phys. Lett.* **B217** (1989) 211.

[37] J. Schwinger, *J. Math. Phys.* **2** (1961) 407.

[38] L. V. Keldysh, *Sov. Phys. JETP* **20** (1965) 1018.

[39] R. A. Craig, *J. Math. Phys.* **9** (1968) 605.

[40] S. Fujita, *Physica* **30** (1964) 848.

[41] L. P. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics*, (Benjamin, New York, 1962).

[42] K. Chou, Z. Su, B. Hao and L. Yu, *Phys. Reports* **118** (1985) 1.

[43] T. Arimitsu, J. Pradko and H. Umezawa, *Physica* **135A** (1986) 487.

[44] M. Marinaro, *Physics Reports* **137** (1986) 81.

[45] R. Mills, *Propagators for Many-Particle Systems*, (Gordon and Breach Science Publisher, New York, 1969).

[46] B. Bezzerides and D. F. DuBois, *Phys. Rev.* **168** (1968) 233.

[47] A. J. Niemi and G. Semenoff, *Ann. Phys.* **152** (1984) 105.

[48] D. F. DuBois, In W. E. Britten, editor, *Vol IXC in Lecture in Theoretical Physics*, (Gordon and Breach, New York, 1967) p. 469.

[49] W. Botermans and R. Malfliet, *Phys. Lett.* **215B** (1988) 617.

[50] M. Tohyama, *Phys. Rev.* **C86** (1983) 187.

[51] B. Bezzerides and D. F. DuBois, *Ann. Phys.* **70** (1972) 10.

[52] E. Calzetta and B. L. Hu, *Phys. Rev* **D37** (1988) 2878.

[53] T. Arimitsu, *Physica* **148A** (1988) 427.

[54] I. D. Lawrie, *J. Phys.* **A21** (1989) L823.

[55] V. Korenman, *Ann. Phys.* **39** (1969) 1387.

[56] I. Hardman, H. Umezawa and Y. Yamanaka, *Physica* **156A** (1989) 853.

[57] T. Matsubara, *Prog. Theor. Phys.* **14** (1955) 351.

[58] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov and I. E. Dzyaloshinskii, *Sov. Phys. JETP* **9** (1959) 636.

[59] H. Ezawa, Y.Tomozawa and H.Umezawa, *Nuovo Cimento* **5** (1957) 810.

[60] H. Ezawa, In F. Mancini, editor, *Quantum Field Theory*, (North-Holland, Amsterdam, 1985).

[61] T. Thouless, *Phys. Rev.* **107** (1957) 1162.

[62] C. Bloch and C. Dominicis, *Nucl. Phys.* **7** (1958) 459.

[63] T. Garavaglia, *Phys. Rev.* **A38** (1988) 4365.

[64] T. Garavaglia, The characteristic functions for the squeezed coherent chaotic phoyon state with application to the jaynes-cummings model, *Preprint* (1989).

[65] T. Garavaglia, *Phys. Lett.* bf 131A (1988) 151.

[66] K. Tanabe, *Phys. Rev.* **C37** (1988) 2802.

[67] M. Yamamura, J. da Providência, A. Kuriyama and C. Fiolhais, *Prog. Theor. Phys.* **81** (1989) 1198.

[68] M. Yamamura, J. da Providência, A. Kuriyama and C. Fiolhais, *Prog. Theor. Phys.* **83** (1989) 749.

[69] M. Yamamura, J. da Providência and A. Kuriyama, *Nuclear Physics* **514A** (1990) 461.

[70] T. K. Kopec, *Japanese Journal of Applied Physics*, Supplement **26** (1987) 791.

[71] T. K. Kopec, K. D. Usadel and G. Büttner, *Phys. Rev.* **B39** (1989) 12418.

[72] T. K. Kopec and P. Wrobel, *J. Phys. (London)* **2** (1990) 397.

[73] T. K. Kopec, B. Tadic, R. Pirc and R. Blinc, *Z. Phys.* **B78** (1990) 493.

[74] M. Suzuki, In H. Ezawa and S. Kamefuchi, editors, *Progress in Quantum Field Theory*, (North-Holland, Amsterdam, 1985) p. 203.

[75] R. L. Kobes and G. Semenoff, *Nucl. Phys.* **B260** (1985) 714.

[76] R. L. Kobes and G. Semenoff, *Nucl. Phys.* **B272** (1986) 329.

[77] P. Danielewicz, *Ann. Phys.* **197** (1990) 154.

[78] A. Niegawa, *Phys. Lett.* **247B** (1990) 351.

[79] T. S. Evans, *Phys. Lett.* **252B** (1991) 108.

[80] R. Kobes, *Phys. Rev.* **D42** (1990) 562.

[81] R. Kobes, *Phys. Rev.* **D43** (1991) 1269.

[82] Y. Fujimoto, R. Grigjanis and R. Kobes, *Prog. Theor. Phys.* **73** (1985) 434.

[83] Y. Fujimoto and R. Grigjanis, *Prog. Theor. Phys.* **74** (1985) 1105.

[84] Y. Fujimoto, *Z. Phys.* **C30** (1986) 99.

[85] Y. Leblanc, *Phys. Rev.* **D36** (1987) 1780.

[86] Y. Leblanc, *Phys. Rev.* **D37** (1988) 1547.

[87] Y. Leblanc, *Phys. Rev.* **D39** (1989) 1134.

[88] E. Ahmed, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 684.

[89] H. Fujisaki, *Prog. Theor. Phys.* **81** (1989) 473.

[90] H. Fujisaki and K. Nakagawa, *Prog. Theor. Phys.* **83** (1990) 18.

[91] E. Fermi, *Prog. Theor. Phys.* **5** (1950) 570.

[92] E. Fermi, *Phys. Rev.* **81** (1951) 683.

[93] L. D. Landau, *Uspekhi Fiz. Nauk.* **56** (1955) 309.

[94] L. D. Landau, *Izv. Akad. Nauk SSSR* **17** (1953) 51.

[95] H. A. Weldon, *Phys. Rev.* **D42** (1990) 2384.

[96] E. Braaten, R. D. Pisarski and T. C. Yuan, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 2242.

[97] E. Braaten and R. D. Pisarki, *Phys. Rev.* **D42** (1990) 2156.

[98] R. Kobes, G. Kunstatter and A. Rebhon, *Nuc. Phys.* **B355** (1991) 1.

[99] R. Pisarski, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 1129.

[100] R. Kobes and G. Kunstatter, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 392.

[101] G. Baym, P. Braun-Munzinger and S. Nagamiya, editors, *Proceedings of Qaurk Matter '88*, *Nucl. Phys.* **A498** (1989).

[102] J. P. Blaizot, C. Gershel, B. Pire and A. Romana, editors, *Nucl. Phys.* **A498** (1989). *Proceedings of Qaurk Matter '90*, *Nucl. Phys.* **A525** (1991).

[103] E. C. G. Stückelberg and A. Peterman, *Helv. Phys. Acta* **26** (1953) 499.

[104] M. Gellman and F. E. Low, *Phys. Rev.* **95** (1954) 1300.

[105] D. J. Gross, In R. Balian and J. Jinn-Justin, editors, *Method in Field Theory*,

(North-Holland, Amsterdam, 1976).

[106] K. G. Wilson and J. Kogut, *Phys. Reports* **12C** (1974) 75.

[107] H. Matsumoto, Y. Nakano and H. Umezawa, *Phys. Rev.* **D29** (1984) 1116.

[108] Y. Fujimoto and H. Yamada, *Phys. Lett.* **212B** (1988) 77.

[109] H. Yamada, *Phys. Lett.* **223B** (1989) 229.

[110] H. Nakagawa, A. Niegawa and H. Yokota, *Phys. Lett.* **244B** (1990) 58.

[111] R. Baier, B. Pire and D. Schiff, *Phys. Lett.* **238B** (1990) 367.

[112] Y. Fujimoto, K. Ideura, Y. Nakano and H. Yoneyama, *Phys. Lett.* **167B** (1986) 406.

[113] K. Funakubo and M. Sakamoto, *Prog. Theor. Phys.* **76** (1986) 490.

[114] K. Funakubo and M. Sakamoto, *Phys. Lett.* **186B** (1987) 205.

[115] Y. Yamanaka, H. Umezawa, K. Nakamura and T. Arimitsu, *Mod. Phys.* **A9** (1994) 1153.

# 9

# 時空に依存する TFD

## 9.1 準　　備

### 9.1.1 動　　機

前章では，7 章で示した TFD の構造に基づいて熱平衡 TFD を議論した。TFD におけるもっとも重要で一般的な規則は，チルダ共役則と $\hat{H} = H - \tilde{H}$ なるハミルトニアンの構造である。

明らかに，定常状態は熱平衡状態の特別な場合にすぎない。しかし，いったん定常熱現象を扱う場の量子論が確立すると，異なる熱的環境の比較が可能となる。熱的自由度は異なる熱的環境を比べるときにのみ現われるので，その比較によってのみ熱的自由度が場の量子論に含まれることを認識できる。すると自然に,「時空に依存する状況では，この熱的自由度はどのように振る舞うのか」と聞きたくなる。本章では，定常 TFD を時空に依存する TFD へ拡張する [1, 2, 3]。この拡張を促す多くの理由がある。

前章で行った t 表示での議論によると，物質波の伝播中に熱ゆらぎが現われる。これは，TFD における多くの熱的状態が粒子反応の最中に現われることを示唆している。すると,「**時間に依存する**熱現象において，これらの t 表示での過渡的熱ゆらぎが，どのように振る舞うのか」ということが知りたくなる。これが，t 表示法を時間に依存する熱的状況へ拡張することの動機である。

温度の空間分布が一様でない状態では，自然に熱的状態の時間発展が起こり

一様分布へ向かう。これがよく知られた熱伝導現象である。このような状況を扱うためには，空間的に非一様な真空を許す場の量子論（熱現象を扱う）が必要となる [4]。時空に依存する熱物理学を扱うこの種の理論体系は，固体物理の多くの問題に応用されるであろう。

時間に依存する熱的量子論は，宇宙の進化の議論にも有用である。宇宙の進化はすべての基本的な量子場に制御され，しかもその進化は熱力学的効果をも含むので，明らかに時間に依存する熱現象を扱う場の量子論が必要となる。宇宙の進化が孤立系で起きていることに注意せよ。

この章は他の章とは次の意味で異なっている。この章で示されるアイディアは確立されたものというよりはむしろ，新しいアプローチの試みにすぎない。読者がここに挙げるアイディアに興味をもち，ひいてはこの分野のあらゆる方面の研究にたずさわることを期待する。

時空に依存する熱の問題に関する基本的疑問は,「時空依存の過程がどのように始まるか」というものである。この問題を調べるためには，自発的対称性の破れがどのよう始まるかを思い出してみるとよい。5 章で見たように摂動計算では，自発的対称性の破れの解析は $H_0+\delta H$ の形の非摂動ハミルトニアンで始められる。ただし，$H_0$ はある対称性を満たす自由ハミルトニアンであり，$\delta H$ はその対称性を壊すハミルトニアンである。同様に，時間に依存する過程の解析でも $\hat{H}_0-\hat{Q}$ の形の非摂動ハミルトニアンで議論が始まる。ただし，$\hat{Q}$ は時間変化を起こす演算子である。$\hat{Q}$ を決定することがこの章の重要な目的である。

時空に依存する TFD の構造は複雑であるので，次節ではまず時間に依存する TFD を議論することにする。それは 9.3 節で，時空依存の TFD へ拡張される。これらの定式化には t 表示が利用される。

## 9.2 時間に依存する TFD

### 9.2.1 時間に依存する Bogoliubov 変換

この節では時間に依存する熱的環境を考察する；空間的変化は次の節で扱う。

前の二つの章で TFD の基礎的な枠組みを示した。定常 TFD では，自由振動子場 $a_k^\mu$ に対する熱的 Bogoliubov 変換 $a_k = B_k^{-1}(\theta)\xi$ を用いた。そこで時間に依存する過程は，時間に依存する Bogoliubov 行列によって記述されると仮定するのが自然である。この章ではこの仮定を試してみる。つまり，Bogoliubov 変換は $a_k(t) = B_k^{-1}(t)\xi_k$ となる [5, 6]。熱的環境のあらゆる時間変化は振動子

演算子 $a_k(t)$ の時間変化によって記述され，時間依存のない $\xi_k^\mu$ の真空上に作られた Fock 空間は時間に依存しない。$\xi_k^\mu$ の真空を $|0\rangle$ と記す。この真空は非加算無限個あるので，後で示すように自己無撞着に決定される。その際自己無撞着なくりこみ条件が用いられる。もし，その真空が自己無撞着に決定できないとしたら，時間に依存しない真空が時間に依存する熱過程を記述するという仮定が間違っていたことになる。しかし実際には，時間に依存しない真空を自己無撞着に決定することができる。自己無撞着なくりこみ条件から Boltzmann 方程式が得られる。

計算を実行するために Heisenberg 表示から相互作用表示に移り，7 章での相互作用表示の方法に従って自由準粒子描像を導入する。Heisenberg 表示と相互作用表示が一致する時刻を $t_0$ とする。Feynman 図法を利用したいので，7 章で見たように有限の $t_0$ を採用することはできない。$t_0 = \infty$ か $t_0 = -\infty$ かのいずれかを選ばなくてはならない。7 章より，$(t_0 = -\infty, \alpha = 1)$ か $(t_0 = \infty, \alpha = 0)$ の選択が許されることがわかっている。通常の場の理論で採用されている $t_0 = -\infty$ を選択して考察を始めよう。つまり，$(t_0 = -\infty, \alpha = 1)$ の場合に，時間に依存しない真空が自己無撞着に決定されるかを調べるのである。

さて，(7.63)，(7.64) の変換は

$$\xi_k^\mu = B_k(t)^{\mu\nu} \exp[i\int_{t_0}^t ds\,\omega_k(s)] a_k(t)^\nu \tag{9.1}$$

$$\bar{\xi}_k^\mu = \bar{a}_k(t)^\nu \exp[-i\int_{t_0}^t ds\,\omega_k(s)] B_k^{-1}(t)^{\nu\mu} \tag{9.2}$$

となる。ただし，熱的二重項の定義は前章と同じである。

この表式には説明が必要である。定常な熱的環境では $a_k(t) = a_k \exp[-i\omega_k t]$ である。時間に依存する熱的環境では，熱の影響のため量子エネルギー $\omega_k$ が時間に依存する。したがって $\omega_k(t)$ を導入し，波動関数 $\exp[-i\omega_k t]$ は exp $[-i\int_{t_0}^t ds\,\omega_k(s)]$ で置き換える。この波動関数は

$$i\frac{d}{dt}e^{[-i\int_{t_0}^t ds\,\omega_k(s)]} = \omega_k(t) e^{[-i\int_{t_0}^t ds\,\omega_k(s)]} \tag{9.3}$$

を満たす。

さて，この定式化を自由場に応用する。簡単のため，同時刻交換関係

$$[a_k(t)^\mu, a_l(t)^\nu] = \delta_{\mu\nu}\delta(\vec{k} - \vec{l}) \tag{9.4}$$

を満たす場：

$$\varphi(x)^\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{(3/2)}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} a_k(t)^\mu \tag{9.5}$$

$$\bar{\varphi}(x)^\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{(3/2)}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \bar{a}_k(t)^\mu \tag{9.6}$$

を考える。

通常の場の量子論では，準粒子演算子は $\xi_k(t) = \xi_k \exp[-i\omega_k t]$ の形をもつ。このことを TFD に移植して，準粒子演算子

$$\xi_k(t)^\mu = \xi_k^\mu \exp[-i\int_{t_0}^t ds\, \omega_k(s)], \quad \bar{\xi}_k(t)^\mu = \bar{\xi}_k^\mu \exp[i\int_{t_0}^t ds\, \omega_k(s)] \tag{9.7}$$

を導入する。$\xi_k^\mu$，$\bar{\xi}_k^\mu$ は時間に依存しないので，

$$[\frac{d}{dt} + i\omega_k(t)]\xi_k(t)^\mu = 0 \tag{9.8}$$

$$\bar{\xi}_k(t)^\mu[\frac{\overleftarrow{d}}{dt} - i\omega_k(t)] = 0 \tag{9.9}$$

を得る。これらの方程式に対するハミルトニアンは $\hat{H}_0$ である。つまり，準粒子の非摂動ハミルトニアンは $\hat{H}_0$ であり，それは $\xi$ に関して対角的である。

上記の Bogoliubov 変換はこの場合

$$\xi_k(t)^\mu = B_k(t)^{\mu\nu} a_k(t)^\nu, \quad \bar{\xi}_k(t)^\mu = \bar{a}_k(t)^\nu B_k^{-1}(t)^{\nu\mu} \tag{9.10}$$

となる。(9.8)，(9.9) より

$$[\frac{d}{dt} + i\omega_k(t) - iP_k(t)]a_k(t) = 0 \tag{9.11}$$

$$\bar{a}_k[\frac{\overleftarrow{d}}{dt} - i\omega_k(t) + iP_k(t)] = 0 \tag{9.12}$$

が得られる [7]。ただし

$$P_k(t) \equiv iB_k^{-1}(t)\frac{d}{dt}B_k(t) \tag{9.13}$$

である。$P_k(t)$ のこの定義から，$[d/dt - iP_k(t)]$ は**共変時間微分**と呼ばれる [7]。この定義を見ると，ゲージ理論に沿ってここでのアプローチを定式化することも可能に思われるが，ここではその考察は行わない。

(9.12) を見ると $\bar{a}_k(t)a_k(t)$ は時間に依存しない。これは個数演算子ではないことに注意せよ。個数演算子は $a_k^\dagger(t)a_k(t) = (\bar{a}_k(t)\tau_3 a_k(t))^{11}$ で与えられる。

$a$ 演算子に対する非摂動ハミルトニアンは

$$\hat{H}_Q(t) = \hat{H}_0(t) - \hat{Q}(t) \tag{9.14}$$

で与えられる。このことは

$$i\frac{d}{dt}a_k(t) = [a_k(t), \hat{H}_Q] \tag{9.15}$$

$$i\frac{d}{dt}\bar{a}_k(t) = [\bar{a}_k(t), \hat{H}_Q] \tag{9.16}$$

よりわかる。ただし，

$$\hat{H}_0(t) = \int d^3k\, \bar{a}_k(t)\omega_k(t)a_k(t) \tag{9.17}$$

であり，

$$\hat{Q}(t) = \int d^3k\, \bar{a}_k(t)P_k(t)a_k(t) \tag{9.18}$$

である。

時間に依存する Bogoliubov 行列 $B_k(t)$ は，$B_k(\theta)$ の $\theta$ を時間で置き換えると得られる。$B_k(\theta)$ の表式 (7.86) を思い出そう。それは三つのパラメータ $(\alpha_k, s_k, n_k)$ で表わされていた；パラメータ $\theta$ はこれら三つのパラメータを意味する。一般には，これらのパラメータは時間に依存する。その場合，熱の時間的振舞いは，SU(1,1) 代数をなす $n_k(t)$，$\alpha_k(t)$，$s_k(t)$ の 3 次元空間での軌道として表わされる。この議論の SU(1,1) ゲージ理論への拡張は，Henning らによって行われた。その興味深い発展に関しては [8] を見よ。ここでは，前章の t 表示で用いた $\alpha$ と $s_k$ を採用する。つまり，$\alpha = 1$ と $s_k(t) = \ln[1+\sigma n_k(t)]^{1/2}$ である。

この場合 (8.95) より

$$B_k(t) = \begin{bmatrix} 1+\sigma n_k(t) & -n_k(t) \\ -\sigma & 1 \end{bmatrix} \tag{9.19}$$

であり，その逆は

$$B_k^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & n_k(t) \\ \sigma & 1+\sigma n_k(t) \end{bmatrix} \tag{9.20}$$

である。$B_k(t)$ は $n_k(t)$ に関して1次であるので計算が簡単になる。

行列 $P_k$ は，

$$P_k(t) = i\sigma \dot{n}_k(t) T_0 \tag{9.21}$$

の簡単な形となり，(9.18) の演算子 $\hat{Q}$ は

$$\hat{Q}(t) = i\sigma \int d^3k\, \dot{n}_k(t) \bar{a}_k(t) T_0 a_k(t) \tag{9.22}$$

となる。ただし，8章で定義したように $T_0$ は

$$T_0 \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\sigma \\ \sigma & -1 \end{bmatrix} \tag{9.23}$$

である。

これらの関係から**非摂動ハミルトニアンがチルダ共役の下で符号を替えること**：

$$[\hat{H}_Q(t)]^{\sim} = -\hat{H}_Q(t) \tag{9.24}$$

が導かれる。

相互作用のある場合に移ろう。以前に述べたように，系が与えられるとそのラグランジアンが決まる。これより，Hamilton-Jacobi 法に従って力学的ハミルトニアン $H$ が簡単に求まる。TFD では，これはハミルトニアンではなく力学的エネルギー演算子である。$H$ は自由な部分と相互作用の部分に分けられる：

$$H = H_0 + H_{int}. \tag{9.25}$$

したがって，TFD ハミルトニアンは

$$\hat{H} = H - \tilde{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} \tag{9.26}$$

で与えられる。ただし

$$\hat{H}_{int} = H_{int} - \tilde{H}_{int} \tag{9.27}$$

である。

摂動計算が行われる相互作用表示では，演算子の変化は非摂動ハミルトニアンで誘起され，状態の時間変化は相互作用ハミルトニアン $\hat{H}_I$ で誘起される。非摂動ハミルトニアンは $\hat{H}_0$ ではなく，前の小節で得られた $\hat{H}_Q$ である：

$$\hat{H}_Q = \hat{H}_0 - \hat{Q}. \tag{9.28}$$

$\hat{Q}$ 項は，時間に依存する Bogoliubov 行列に起因する非摂動ハミルトニアンへの影響を表わしている。全ハミルトニアンは $\hat{H}$ であるので，相互作用ハミルトニアン $\hat{H}_I$ には $\hat{Q}$ カウンター項が含まれる：

$$\hat{H}_I = \hat{H}_{int} + \hat{Q}. \tag{9.29}$$

今まで粒子数は，Bogoliubov 変換中の個数パラメータを通して定義されてきた。準粒子描像では相互作用があるので，粒子数に変更を加える必要がある。関連した変更を Bogoliubov 変換に施すことにより，それを実行する。これにより補正された準粒子数が得られる。一方，観測にかかる粒子数は，Heisenberg 表示における個数演算子の真空期待値で与えられる。これを Heisenberg の個数と呼ぶことにする。ここで重要なことは，この二つの個数が，熱的不安定性のために生じたエネルギー不確定性の分だけ異なっている点である。後の節で示すように，個数ゆらぎの影響を分離すると，**Bogoliubov 変換中の補正された個数パラメータが Heisenberg の個数と一致する。**

### 9.2.2 非摂動一体伝播関数

この節では非摂動ハミルトニアン $\hat{H}_Q$ で記述される場に対する非摂動伝播関数を調べる。

非摂動伝播関数は

$$\Delta_k(t,t')^{\mu\nu}\delta(\vec{k}-\vec{l}) = -i\langle 0|T[a_k(t)^{\mu}\bar{a}_l(t)^{\nu}|0\rangle \tag{9.30}$$

で与えられる。ただし，振動子演算子 $a_k$，$\bar{a}_k$ は時間に依存する Bogoliubov 変換を通して，(9.1)，(9.2) で導入されたものである。したがって，次の非摂動伝播関数を得る [5, 7, 6]：

$$\Delta_k(t,t')^{\mu\nu} = \left[B_k^{-1}(t)D_k(t,t')B_k(t')\right]^{\mu\nu} \tag{9.31}$$

ただし，$D_k(t,t')$ は対角行列で

$$D_k(t,t') = \begin{bmatrix} -i\theta(t-t') & 0 \\ 0 & i\theta(t'-t) \end{bmatrix} e^{-i\int_{t'}^{t} ds\omega_k(s)} \tag{9.32}$$

によって定義される。この非摂動伝播関数の構造は特筆に値する。それは，対角的伝播関数を両側から Bogoliubov 行列ではさんだ構造をもつ。この伝播関数を Feynman 図中の線に用いると，熱的変化の本質的な部分は各結節点に押

し込められ，波の伝播に対する熱の影響はなくなる。後の節で見るように，相互作用のある場合でも，一体伝播関数のこの構造は少しの変更で保たれる。

ここまでは，時間に依存する熱現象に対する非摂動伝播関数を振動子演算子 $a_k(t)$ で記述してきた。ここでこの結果を自由場 $\varphi$ で書き下そう。簡単のため，1 型の場を考える：

$$
\begin{aligned}
\varphi(x)^\mu &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\int_{-\infty}^{t}\omega_k(s)ds} a_k(t)^\mu \\
\bar{\varphi}(x)^\mu &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}+i\int_{-\infty}^{t}\omega_k(s)ds} \bar{a}_k(t)^\mu .
\end{aligned} \tag{9.33}
$$

結果は簡単に 2 型の場へ拡張できる。

伝播関数は

$$
\Delta_c(x,x')^{\mu\nu} = -i\langle 0|T[\varphi(x)^\mu \bar{\varphi}(x')^\nu]|0\rangle \tag{9.34}
$$

で定義される。これは上の結果を用いて

$$
\Delta_c(x-x')^{\mu\nu} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')-i\int_{t'}^{t}\omega_k(s)ds} \Delta_k(t,t') \tag{9.35}
$$

により求められる。これは非摂動伝播関数であり，Feynman 図の内線として用いられる。

### 9.2.3 補正された粒子数

この小節では相互作用の補正を受けた一体伝播関数を調べる。

1 型の Heisenberg 場を考えよう：

$$
\begin{aligned}
\psi(x)^\mu &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, a_{Hk}(t)^\mu \\
\bar{\psi}(x)^\mu &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, \bar{a}_{Hk}(t)^\mu .
\end{aligned} \tag{9.36}
$$

伝播関数は

$$
G_c(x-x')^{\mu\nu} = -i\langle 0|T[\psi(x)^\mu \bar{\psi}(x')^\nu]|0\rangle \tag{9.37}
$$

で定義される。これを 3 次元 Fourier 形式に変換する：

$$
G_c(x-x')^{\mu\nu} = -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} G_k(t,t')^{\mu\nu} . \tag{9.38}
$$

ただし，$G_k(t,t')^{\mu\nu}$は

$$G_k(t,t')^{\mu\nu}\delta(\vec{k}-\vec{l}) = -i\langle 0|T[a_{Hk}(t)^{\mu}\bar{a}_{Hl}(t')^{\nu}]|0\rangle \tag{9.39}$$

で定義される。

これを相互作用表示の演算子で書き直すと，

$$G_k(t,t')^{\mu\nu}\delta(\vec{k}-\vec{l}) = -i\langle 0|T[a_k(t)^{\mu}\bar{a}_l(t')^{\nu}\hat{S}]|0\rangle \tag{9.40}$$

となる。ただし，ここでの相互作用表示では，$\hat{H}_Q(t)$ を非摂動ハミルトニアンとし，$\hat{H}_I$ を相互作用ハミルトニアンとしている。演算子 $\hat{S}$ は

$$\hat{S} \equiv \hat{u}(\infty,-\infty) \tag{9.41}$$

$$= T\left[\exp[-i\int_{-\infty}^{\infty} ds\, \hat{H}_I(s)]\right] \tag{9.42}$$

で導入される。ただし，

$$i\frac{d}{dt}\hat{u}(t,t_0) = \hat{H}_I(t)\hat{u}(t,t_0) \tag{9.43}$$

$$\hat{u}(t_0,t_0) = 1 \tag{9.44}$$

である。以前に述べたように，$t_0 = -\infty$ としている。ただし，$t_0$ は Heisenberg 表示と相互作用表示が一致する時刻である。

以上より，次の結果を得る：

$$\begin{aligned}
&F_k(t,t')^{\mu\nu}\delta(\vec{k}-\vec{l}) \\
&\equiv B[n_k(t)]^{\mu\mu'}G_k(t,t')^{\mu'\nu'}B^{-1}[n_k(t')]^{\nu'\nu}\delta(\vec{k}-\vec{l}) \\
&= -i\theta(t-t')\langle 0|\xi_k(t)^{\mu}\hat{u}(t,t')\bar{\xi}_l(t')^{\nu}\hat{u}(t',-\infty)|0\rangle \\
&+ i\theta(t'-t)\langle 0|\bar{\xi}_l(t')^{\nu}\hat{u}(t',t)\xi_k(t)^{\mu}\hat{u}(t,-\infty)|0\rangle.
\end{aligned} \tag{9.45}$$

ただし，$\alpha = 1$ で成立する

$$\langle 0|\hat{u}(\infty,t) = \langle 0| \tag{9.46}$$

を用いた。これより

$$\langle 0|\hat{H}_I(t) = 0 \tag{9.47}$$

を得る。

$\xi_k^2$ と $\tilde{\xi}_k^1$ はブラ真空を消去するので，

$$\begin{aligned} F_k(t,t')^{21} &= 0 \\ F_k(t,t')^{11} &= -i\theta(t-t')g(t,t':\vec{k})^{11} \\ F_k(t,t')^{22} &= i\theta(t'-t)g(t,t':\vec{k})^{22} \end{aligned} \tag{9.48}$$

を得る。しかし，$F_k^{12}$ は一般には消えない：

$$F_k(t,t')^{12} \equiv g(t,t':\vec{k})^{12} \neq 0. \tag{9.49}$$

ただし，$g(t,t':\vec{k})^{11}$，$g(t,t':\vec{k})^{22}$ ，$g(t,t':\vec{k})^{12}$ は，内線の時間変数 $\{s_i\}$ に関する積分で与えられた関数である。それぞれの積分領域は $-\infty$ から，$t$，$t'$，$\max\{t,t'\}$ である。

こうして，(9.40) で定義された $G_k(t,t')^{\mu\nu}$ の一般的構造が

$$G_k(t,t')^{\mu\nu} = B^{-1}[n_k(t)]^{\mu\mu'} \times \begin{bmatrix} -i\theta(t-t')g(t,t':\vec{k})^{11} & g(t,t':\vec{k})^{12} \\ 0 & i\theta(t'-t)g(t,t':\vec{k})^{22} \end{bmatrix}^{\mu'\nu'} B[n_k(t')]^{\nu'\nu} \tag{9.50}$$

と求まる。$g_\pm(t,t':\vec{k})$ を

$$g(t,t':\vec{k})^{12} = -i\theta(t-t')g_+(t,t':\vec{k}) + i\theta(t'-t)g_-(t,t':\vec{k}) \tag{9.51}$$

で導入しよう。小節 7.2.2 で与えられたチルダ共役則を (9.39) に適用すると，

$$g^*(t,t':\vec{k})^{11} = g(t',t:\vec{k})^{22} \tag{9.52}$$

$$g_+^*(t,t':\vec{k}) = -g_-(t',t:\vec{k}) \tag{9.53}$$

を得る。

ここで，Bogoliubov 行列中の個数密度パラメータの定義は，この時点では唯一でないことを示す。このことを見るために，行列に対する次の初歩的関係を利用する：

$$D_2\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} D_1^{-1} = \begin{bmatrix} a & b-ad_1+cd_2 \\ 0 & c \end{bmatrix} \tag{9.54}$$

$d_1$と $d_2$を

$$b - ad_1 + cd_2 = 0 \tag{9.55}$$

を満たすように選ぶと，これは対角的になる。上記の行列 $D_i$ は

$$\begin{bmatrix} 1 & d_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.56}$$

で与えられているものとする。

さらに，

$$B[n]B^{-1}[N] = \begin{bmatrix} 1 & N-n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.57}$$

の関係があるので，行列 $D_i$ は Bogoliubov 行列で作ることができる。

これより，(9.50) 中の $g(t,t':\vec{k})^{12}$ を変更することによって，Bogoliubov 変換の数密度パラメータを変えられることがわかる。さらに，数密度パラメータを適切に選べば，(9.50) 中にある，Bogoliubov 行列の間の伝播関数を対角化できることがわかる。簡単にいうと，Bogoliubov 変換中の数密度パラメータは，対角的伝播の要請で唯一に決定されるのである。その要請とは,「一体伝播関数は，対角的な伝播関数が二つの Bogoliubov 行列の間にはさまれた形をもつ」というものである。

この対角化法を用いると (9.50) は

$$\begin{aligned} G_k(t,t')^{\mu\nu} &= B^{-1}[N_{2,k}(t,t')]^{\mu\mu'} \\ &\times \begin{bmatrix} -i\theta(t-t')g(t,t':\vec{k})^{11} & 0 \\ 0 & i\theta(t'-t)g(t,t':\vec{k})^{22} \end{bmatrix}^{\mu'\nu'} B[N_{1,k}(t,t')]^{\nu'\nu} \end{aligned} \tag{9.58}$$

と書き直せる。ただし，数密度パラメータは

$$\begin{aligned} N_{1,k}(t,t') &= n_k(t') - i\frac{g(t,t':\vec{k})^{12}}{g(t,t':\vec{k})^{11}} \\ N_{2,k}(t,t') &= n_k(t) - i\frac{g(t,t':\vec{k})^{12}}{g(t,t':\vec{k})^{22}} \end{aligned} \tag{9.59}$$

で与えられる。対角的伝播の要請は，$t \geq t'$ ($t' \geq t$) に対して $N_{1,k}$ ($N_{2,k}$) の形を与える。しかし，ここではこの時間領域の制限を全領域に拡張した。

こうして得られた $N_{i,k}$ を

$$\begin{aligned} N_{1,k}(t,t') &= N_{R1,k}(t') + \nu_{1,k}(t,t') \\ N_{2,k}(t,t') &= N_{R2,k}(t) + \nu_{2,k}(t,t') \end{aligned} \tag{9.60}$$

と書き直す。ただし，

$$\nu_{j,k}(t,t)=0, \qquad j=1,2 \tag{9.61}$$

を満たすものとする。

$N_{Rj,k}$ と $\nu_{j,k}$ は $g$ 関数を用いると

$$N_{R1,k}(t)=n_k(t)-\frac{g_+(t,t:\vec{k})}{g(t,t:\vec{k})^{11}} \tag{9.62}$$

$$N_{R2,k}(t)=n_k(t)+\frac{g_-(t,t:\vec{k})}{g(t,t:\vec{k})^{22}} \tag{9.63}$$

$$\nu_{1,k}(t,t')=-\left(\frac{g_+(t,t':\vec{k})}{g(t,t':\vec{k})^{11}}-\frac{g_+(t',t':\vec{k})}{g(t',t':\vec{k})^{11}}\right) \tag{9.64}$$

$$\nu_{2,k}(t,t')=\frac{g_-(t,t':\vec{k})}{g(t,t':\vec{k})^{22}}-\frac{g_-(t,t:\vec{k})}{g(t,t:\vec{k})^{22}} \tag{9.65}$$

と表わされる。

チルダ共役に関する $g$ 関数の性質 (9.52)，(9.53) により，

$$N^*_{1,k}(t,t')=N_{2,k}(t',t) \tag{9.66}$$

$$N^*_{R1,k}(t)=N_{R2,k}(t) \tag{9.67}$$

$$\nu^*_{1,k}(t,t')=\nu_{2,k}(t',t) \tag{9.68}$$

の関係が簡単に得られる。

数密度パラメータ $N_{R1,k}(t)$（したがって，$N_{R2,k}(t)$ も）は，補正された個数と呼ばれる。この個数の重要性は次の小節でわかる。

### 9.2.4 Heisenberg の個数と補正された個数

Bogoliubov 変換中に現われる補正された個数は観測粒子数であり，それが Heisenberg の個数で与えられることを示す。ただし，Heisenberg の個数 $n_{Hk}(t)$ は，Heisenberg 演算子によって

$$n_{Hk}(t)\delta(\vec{k}-\vec{l})=\langle 0|\bar{a}_{Hk}(t)^1 a_{Hl}(t)^1|0\rangle \tag{9.69}$$

で定義される。

このことを示すために，Heisenberg 演算子を用いた $G_k(t,t')^{\mu\nu}$ の定義を思い出し，$t\to t'$ の極限をとってみよう。$t\geq t'$ におけるこの極限は

$$1+n_{Hk}(t)=g(t,t:\vec{k})^{11}\left[1+N_{R1,k}(t)\right] \tag{9.70}$$

を与え，$t' \geq t$ における極限では

$$n_{Hk}(t) = g(t,t:\vec{k})^{22}\, N_{R2,k}(t) \tag{9.71}$$

となる。

ここで，$g^*(t,t:\vec{k})^{11} = g(t,t:\vec{k})^{22}$，$N^*_{R1,k} = N_{R2,k}$ であることを考慮すると，上の二つの関係式より

$$g(t,t:\vec{k})^{11} = g(t,t:\vec{k})^{22} = 1 \tag{9.72}$$

を得る。これを上の二つの式に代入すると

$$N_{R1,k}(t) = N_{R2,k}(t) = n_{Hk}(t) \tag{9.73}$$

であることがわかる。これは，対角的伝播条件の下では，**Bogoliubov 変換中の補正された個数パラメータが，Heisenberg の粒子数になる**ことを示している。これにより対角的伝播条件の正当性が立証されたことになる。

この結果を物理的に解釈してみよう。Heisenberg 表示での伝播関数 $G_k(t,t')^{\mu\nu}$ は $B^{-1}\times$ (対角行列) $\times B$ の行列構造をもつが，これは (9.31) の非摂動伝播関数 $\Delta_k(t,t')^{\mu\nu}$ の構造と同じである。ただし，非摂動 $B$ 行列は非摂動個数 $n(t)$ をパラメータとしてもつ。一方，相互作用による補正を受けた $B$ 行列中の数密度パラメータは，二つの時間に依存する $N_{i,k}(t,t')$ $(i=1,2)$ で与えられ，その構造は複雑である。しかし，(9.60) のように，それらは二つの部分に分けることができる。一つの時間にしか依存しない部分は，Heisenberg の数密度 $n_{Hk}(t)$ となる。$\nu_{j,k}(t,t')$ と記した残りの部分は $t=t'$ で消えるので，ゆらぎの影響を表わすものと考えられる。つまり，

$$N_{j,k}(t,t') = n_{Hk}(t) + \text{ゆらぎの影響} \tag{9.74}$$

と書ける。

まとめると，次のようになる。摂動計算のすべての次数に対して対角的伝播条件を課す。その結果，二つの時間に依存した Bogoliubov 変換中の個数パラメータを得る。二つの時間を等しくとると，補正された個数が得られ，それは Heisenberg の数と一致する [1, 2]。

この手続きにより，TFD の欠点が除去された。以前には二種類の個数が存在した。一つは Heisenberg の個数，もう一つは Bogoliubov 変換中の個数パラメータである。この節ではこれら二種類の個数を一致させた。補正された個数パラメータは Heisenberg の個数なのである。

### 9.2.5 積公式

前の小節では，相互作用の補正を受けた一体伝播関数が，

$$B^{-1}[N^2(t,t')](\text{対角行列})B[N^1(t,t')] \tag{9.75}$$

の形で与えられることを見た。ただし，

$$N^2(t,t') = n_H(t') + \text{ゆらぎ} \tag{9.76}$$

$$N^1(t,t') = n_H(t) + \text{ゆらぎ} \tag{9.77}$$

である。ここでは運動量の添え字は省略した。

この節では，2点間を結んだ数本の線で構成された自己エネルギー図が，**ゆらぎのない場合**と同じ構造であることを示す。これは時間に依存する熱的環境に対するt表示における積公式である。注意しておくが，この簡単な構造は内線を結ぶ結節点を加えると容易に破壊される。それでもこの図は，自己エネルギー図の計算を示す上で都合がよい。その計算は，相互作用のある場合でも比較的簡単である。

そこで，図3に示された自己エネルギー図を計算することにしよう。結節点が二つだけの自己エネルギー図は必ずこの構造をもつ。

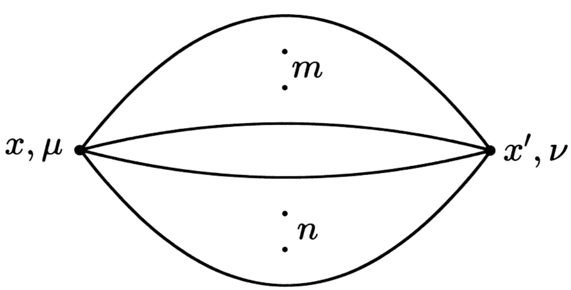



図 3. 積公式が成り立つ自己エネルギー図

この自己エネルギー Feynman 図 $\Sigma_{m,n}(x,x')^{\mu\nu}$ に対する一般的表式は，$C$ を正の数として

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{m,n}(x,x')^{11} &= i^{m+n-1}C(\Delta(x,x')^{11})^m(\Delta(x',x)^{11})^n \\
\Sigma_{m,n}(x,x')^{12} &= i^{m+n-1}C(-1)^{m+1}(\Delta(x,x')^{12})^m(\Delta(x',x)^{21})^n \\
\Sigma_{m,n}(x,x')^{21} &= i^{m+n-1}C(-1)^{n}(\Delta(x,x')^{21})^m(\Delta(x',x)^{12})^n \\
\Sigma_{m,n}(x,x')^{22} &= i^{m+n-1}C(-1)^{m+n+1}(\Delta(x,x')^{22})^m(\Delta(x',x)^{22})^n
\end{aligned}
\tag{9.78}
$$

で与えられる。ただし，$m$ と $n$ は正の整数である。伝播関数 $\Delta(x,x')^{\mu\nu}$ は非摂動伝播関数である。その空間に関する Fourier 変換は (9.31) の $\Delta_k(t,t')$ で与えられる。

($m=2$, $n=0$) と ($m=1$, $n=1$) の場合の 1 ループ自己エネルギー図を計算する。一般の場合については [2] を見よ。$\vec{x}-\vec{x'}$ に関する Fourier 変換を行うと，(9.78) にある自己エネルギーの項は，$m=2$，$n=0$ の場合は

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_{2,0}(t,t',\vec{k})^{\mu\nu} \\
&= iC\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3} \\
&\times\begin{bmatrix} \Delta(t,t',\vec{k}-\vec{q})^{11}\Delta(t,t',\vec{q})^{11} & -\Delta(t,t',\vec{k}-\vec{q})^{12}\Delta(t,t',\vec{q})^{12} \\ \Delta(t,t',\vec{k}-\vec{q})^{21}\Delta(t,t',\vec{q})^{21} & -\Delta(t,t',\vec{k}-\vec{q})^{22}\Delta(t,t',\vec{q})^{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{9.79}
$$

となり，$m=1$，$n=1$ の場合には

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_{1,1}(t,t',\vec{k})^{\mu\nu} \\
&= iC\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3} \\
&\times\begin{bmatrix} \Delta(t,t',\vec{k}-\vec{q})^{11}\Delta(t',t,-\vec{q})^{11} & \Delta(t,t',\vec{k}-\vec{q})^{12}\Delta(t',t,-\vec{q})^{21} \\ -\Delta(t,t',\vec{k}-\vec{q})^{21}\Delta(t',t,-\vec{q})^{12} & -\Delta(t,t',\vec{k}-\vec{q})^{22}\Delta(t',t,-\vec{q})^{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{9.80}
$$

となる。係数 $C$ は正の数因子である。

(9.31) と (9.32) を代入すると，各行列要素は

$$\Delta(t,t',\vec{k}-\vec{q})^{\mu\nu}\Delta(t,t',\vec{q})^{\mu\nu}$$

$$
\begin{aligned}
&= D_{k-q}(t,t')^{11} D_q(t,t')^{11} \\
&\times \left[B_{k-q}^{-1}(t)\frac{1+\tau_3}{2}B_{k-q}(t')\right]^{\mu\nu} \left[B_q^{-1}(t)\frac{1+\tau_3}{2}B_q(t')\right]^{\mu\nu} \\
&+ D_{k-q}(t,t')^{22} D_q(t,t')^{22} \\
&\times \left[B_{k-q}^{-1}(t)\frac{1-\tau_3}{2}B_{k-q}(t')\right]^{\mu\nu} \left[B_q^{-1}(t)\frac{1-\tau_3}{2}B_q(t')\right]^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{9.81}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta(t,t',\vec{k}-\vec{q})^{\mu\nu}\Delta(t',t,-\vec{q})^{\nu\mu} \\
&= D_{k-q}(t,t')^{11} D_{-q}(t',t)^{22} \\
&\times \left[B_{k-q}^{-1}(t)\frac{1+\tau_3}{2}B_{k-q}(t')\right]^{\mu\nu} \left[B_{-q}^{-1}(t')\frac{1-\tau_3}{2}B_{-q}(t)\right]^{\nu\mu} \\
&+ D_{k-q}(t,t')^{22} D_{-q}(t',t)^{11} \\
&\times \left[B_{k-q}^{-1}(t)\frac{1-\tau_3}{2}B_{k-q}(t')\right]^{\mu\nu} \left[B_{-q}^{-1}(t')\frac{1+\tau_3}{2}B_q(t)\right]^{\nu\nu}
\end{aligned} \tag{9.82}
$$

となる。ここでは，引数 $\mu$ と $\nu$ に関する和はとらないものとする。

(8.110)，(8.111) より

$$
\begin{aligned}
B^{-1}(t)\frac{1+\tau_3}{2}B(t') &= T_+ + n(t')T_0 \\
B^{-1}(t)\frac{1-\tau_3}{2}B(t') &= T_- - n(t)T_0
\end{aligned} \tag{9.83}
$$

が得られる。

これを用いると，(9.81) と (9.82) は

$$
\begin{aligned}
&\Delta(t,t',\vec{k}-\vec{q})^{\mu\nu}\Delta(t,t',\vec{q})^{\mu\nu} \\
&= D_{k-q}(t,t')^{11} D_q(t,t')^{11}\frac{n_{k-q}(t')n_q(t')}{N_+(t')} \\
&\times [\{T_+ + N_+(t')T_0\}\tau_3]^{\mu\nu} \\
&- D_{k-q}(t,t')^{22} D_q(t,t')^{22}\frac{n_{k-q}(t)n_q(t))}{N_+(t)} \\
&\times [\{T_- - N_+(t)T_0\}\tau_3]^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{9.84}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta(t,t',\vec{k}-\vec{q})^{\mu\nu}\Delta(t',t,-\vec{q})^{\nu\mu} \\
&= -D_{k-q}(t,t')^{11} D_{-q}(t',t)^{22}\frac{n_{k-q}(t')(1+n_{-q}(t'))}{N_-(t')}
\end{aligned}
$$

$$\times\left[\tau_3\{T_+ + N_-(t')T_0\}\right]^{\mu\nu}$$

$$+ D_{k-q}(t,t')^{22}D_{-q}(t',t)^{11}\frac{n_{k-q}(t)(1+n_{-q}(t))}{N_-(t)}$$

$$\times\left[\tau_3\{T_- - N_-(t)T_0\}\right]^{\mu\nu} \tag{9.85}$$

と書ける。ただし,

$$N_\pm(t) \equiv \frac{F_\pm(t)}{1-F_\pm(t)} \tag{9.86}$$

であり,

$$F_+(t) \equiv F_+(t:\vec{k}-\vec{q},\vec{q}) = f_{k-q}(t)f_q(t) \tag{9.87}$$

$$F_-(t) \equiv F_-(t:\vec{k}-\vec{q},-\vec{q}) = f_{k-q}(t)f_{-q}^{-1}(t) \tag{9.88}$$

とおいた。関数 $f_k$ は $n_k$ と

$$n_k(t) = \frac{f_k(t)}{1-f_k(t)} \tag{9.89}$$

の関係にある。

$N_\pm$ に対する上の結果は，特筆すべき性質をもっている。(9.87) と (9.88) の関係より，$f_k$ が $\exp[-\beta(t)\omega_k]$ の形をもつとき，$F_\pm$ は $\exp[-\beta(t)(\omega_{k-q}\pm\omega_q)]$ となる。つまり，$n_k(t)$ が Boltzmann の形で与えられる場合には $N_\pm$ もその形で与えられるわけである。この結果は任意の $(m,n)$ に対して成立する。

ここで (9.32) の定義を思い出そう。(9.84) と (9.85) は (8.113) の右辺の形をしているので，(9.83) を利用すると

$$\Sigma_{2,0}(t,t',\vec{k})^{\mu\nu} = C\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\Big[B^{-1}[N_+(t)]$$

$$\times\begin{bmatrix}-i\theta(t-t')s_{2,0}(t') & 0\\ 0 & i\theta(t'-t)s_{2,0}(t)\end{bmatrix}B[N_+(t')]\Big]^{\mu\nu}$$

$$\times e^{-i\int_{t'}^{t}ds(\omega_{k-q}(s)+\omega_q(s))} \tag{9.90}$$

$$\Sigma_{1,1}(t,t',\vec{k})^{\mu\nu} = C\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\Big[B^{-1}[N_-(t)]$$

$$\times\begin{bmatrix}-i\theta(t-t')s_{1,1}(t') & 0\\ 0 & i\theta(t'-t)s_{1,1}(t)\end{bmatrix}B[N_-(t')]\Big]^{\mu\nu}$$

$$\times e^{-i\int_{t'}^{t}ds(\omega_{k-q}(s)-\omega_{-q}(s))} \tag{9.91}$$

の形にまとめられる。ただし，

$$s_{2,0}(t) = \frac{n_{k-q}(t)n_q(t))}{N_+(t)} \tag{9.92}$$

$$s_{1,1}(t) = \frac{n_{k-q}(t)(1+n_{-q}(t))}{N_-(t)} \tag{9.93}$$

$$N_+(t) = \frac{n_{k-q}(t)n_q(t)}{1+n_{k-q}(t)+n_q(t)} \tag{9.94}$$

$$N_-(t) = \frac{n_{k-q}(t)[1+n_{-q}(t)]}{n_{-q}(t)-n_{k-q}(t)} \tag{9.95}$$

の関係を用いた。

個数パラメータ $N_\pm(t)$ は，それぞれの自己エネルギー図によって補正された粒子数である。

**問 1** 次の表式を導け。

$$\begin{aligned}\Sigma_{2,1}(t,t',\vec{k})^{\mu\nu} &= \int \prod_{i=1}^{3}\left(\frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3}\right)(2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{q}_1-\vec{q}_2+\vec{q}_3) \\ &\times \left[B^{-1}[N_{2,1}(t)]\begin{bmatrix} -i\theta(t-t')s(t') & 0 \\ 0 & i\theta(t'-t)s(t)\end{bmatrix}B[N_{2,1}(t')]\right]^{\mu\nu} \\ &\times e^{-i\int_{t'}^{t} ds(\omega_{q_1}(s)+\omega_{q_2}(s)-\omega_{q_3}(s))}\end{aligned} \tag{9.96}$$

ただし，

$$s(t) = C\frac{n_{q_1}(t)n_{q_2}(t)(1+n_{q_3}(t))}{N_{2,1}(t)} \tag{9.97}$$

であり

$$N_{2,1} = \frac{n_{q_1}n_{q_2}(1+n_{q_3})}{(1+n_{q_1})(1+n_{q_2})n_{q_3}-n_{q_1}n_{q_2}(1+n_{q_3})} \tag{9.98}$$

である。

ヒント：(9.91) の結果を用いて，行列要素 $\Sigma_{1,1}(t,t',\vec{q}_2-\vec{q}_3)^{\mu\nu}\Delta(t,t',\vec{q}_3)^{\mu\nu}$ を計算せよ。

### 9.2.6 輸送方程式

相互作用表示における時間依存非平衡 TFD の計算方式を発展させた。これによって，期待値や伝播関数が時間に依存するパラメータ（非摂動表現を特徴づける準粒子エネルギー $\omega_k(t)$ や数密度パラメータ $n_k(t)$，それと結合定数等の他のパラメータ）で表わせるようになった。今のところは $\omega_k(t)$ と $n_k(t)$ は

未知量である。これらのパラメータを決定することは，この体系で理論的予言をするために不可欠である。しかし，時間に依存しない非摂動 $\omega_k$ を用いると摂動計算はかなり簡単になる。そこで，この小節では時間に依存しない非摂動 $\omega_k$（たとえば，$t_0 = -\infty$ であるときの $\omega_k = \omega_k(t_0)$）を用いる。しかし，この節と次節の一般的方式は時間に依存する非摂動 $\omega_k$ の場合でも有効である。以下で示すように，時間に依存する $\omega_k(t)$ は自己エネルギーから求めることができる。

しかし，非摂動 $n_k$ の時間依存性の方は，熱的生成子 $\hat{Q}$（$\dot{n}_k$ に比例している）の効果を含むために不可欠である。すべての量は $n_k(t)$ の汎関数であるので，$n_k(t)$ を決定する方程式が必要である。

この節では，自己エネルギーのくりこみ条件によって，$n_k(t)$ の時間発展を記述する方程式を導き出す。

論点をはっきりさせるために，$\psi^\dagger\psi^\dagger\psi\psi$ 型相互作用のモデルを考察しよう。このモデルでは，2 次近似の自己エネルギー $\Sigma^{\mu\nu}$ は 2 ループ自己エネルギー図 (9.96) で与えられる。それは，図 3 で $m=2$，$n=1$ としたものに対応している。

再び強調しておくが，非摂動エネルギー・パラメータ $\omega_k$ は時間依存しない。この場合 (9.96) は非常に簡単化され，次のような自己エネルギーに対するコンパクトな表式を与える；添え字 $\{2,1\}$ を省略し $N_{2,1}$ を単に $N$ と記すと

$$\Sigma(t,t',\vec{k})^{\mu\nu} = \int [dq] \left[ B^{-1}[N(t)] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s(t) \end{bmatrix} \times V(t-t') \begin{bmatrix} s(t') & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B[N(t')] \right]^{\mu\nu} \tag{9.99}$$

となる。ただし，

$$[dq] = \prod_{i=1}^{3} \left( \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2 + \vec{q}_3) \tag{9.100}$$

$$s(t) = C\, \frac{n_{q_1}(t) n_{q_2}(t) \left[1 + n_{q_3}(t)\right]}{N(t)} \tag{9.101}$$

$$V(t-t')^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -i\theta(t-t') & 0 \\ 0 & i\theta(t'-t) \end{bmatrix}^{\mu\nu} \exp[-iW(t-t')] \tag{9.102}$$

$$W = \omega_{q_1} + \omega_{q_2} - \omega_{q_3} \tag{9.103}$$

である。また，$n_q(t)$ は非摂動個数パラメータ，係数 $C$ はこのモデルにおける正の数因子である。

対角行列 $V(t-t')^{\mu\nu}$ は，準粒子の波動伝播を記述する。その Fourier 変換は

$$V(t-t')^{\mu\nu} \equiv \int \frac{dk_0}{2\pi}\, e^{-ik_0(t-t')} V(k_0)^{\mu\nu} \tag{9.104}$$

$$V(k_0)^{\mu\nu} = \left[\frac{1}{k_0 - W + i\epsilon\tau_3}\right]^{\mu\nu} \tag{9.105}$$

となる。通常の場の理論では，$V(t-t')^{\mu\nu}$ の構造は自己エネルギーのものと同じである。そこで，通常の手続きを $V(t-t')^{\mu\nu}$ に適用して，全自己エネルギー (9.99) から殻上部分を取り出すことにする：(9.104) の $V(k_0)^{\mu\nu}$ において $k_0$ を殻上 $k_0 = \omega_k$ におくと

$$V^{(0)}(t-t')^{\mu\nu} = V(k_0 = \omega_k)^{\mu\nu}\delta(t-t') \tag{9.106}$$

を得る。これを (9.99) の $V(t-t')^{\mu\nu}$ に代入すると

$$\Sigma(t,t',\vec{k})^{(0)\mu\nu} = \delta(t-t') \int [dq]\, s(t) \left[B^{-1}[N(t)] V(k_0 = \omega_k) B[N(t)]\right]^{\mu\nu} \tag{9.107}$$

が得られる。**これは t 表示での殻上自己エネルギーである。**

$V^{(0)}(t-t')^{\mu\nu}$ 中の $\delta(t-t')$ のため，$N$ や $s$ 中の $t$ と $t'$ は一致する。

(9.107) の実部は

$$\Re\Sigma(t,t',\vec{k})^{(0)\mu\nu} = \delta(t-t') \int [dq]\, s(t) \left[B^{-1}[N(t)] \frac{\mathcal{P}}{\omega_k - W} B[N(t)]\right]^{\mu\nu} \tag{9.108}$$

となる。この部分は，1 ループ自己エネルギー（タグ・ダイヤグラム）によるエネルギー・シフトとともに，時間に依存するエネルギー・シフト $\delta\omega_k(t)$ に寄与する。

(9.107) の虚部は

$$\Im\Sigma(t,t',\vec{k})^{(0)\mu\nu} = -i\delta(t-t') \int [dq]\, s(t) \pi\delta(\omega_k - W) A[N(t)]^{\mu\nu} \tag{9.109}$$

となる。ただし，(9.105) と公式 $\Im[1/(x + i\epsilon\tau_3)] = -i\tau_3\delta(x)$ を用いた。行列 $A$ は $B^{-1}\tau_3 B$ である。

上の自己エネルギーとともに，相互作用ハミルトニアン $\hat{H}_I = \hat{H}_{int} + \hat{Q}$ にある $\hat{Q}$ は自己エネルギー・カウンター項となる。殻上の全自己エネルギーを $\Sigma^0_{tot}$ と記すことにする。実部は $\hat{Q}$ による変更を受けないが，殻上全自己エネルギーの虚部は

$$\Im\Sigma_{tot}(t,t',\vec{k})^{(0)\mu\nu} = \delta\Sigma(t,\vec{k})^{\mu\nu}\delta(t-t') \tag{9.110}$$

となる。ただし，

$$\delta\Sigma(t,\vec{k})^{\mu\nu} = -i\left[-\dot{n}_k(t)T_0 + \int[dq]\,s(t)\pi\delta(\omega_k - W)A[N(t)]\right]^{\mu\nu} \tag{9.111}$$

とおいた。これは，準粒子ハミルトニアンに自己エネルギーの寄与 $\delta\hat{H} = \bar{a}_k(t)\delta\Sigma(t,\vec{k})a_k(t)$ を導入する。任意の $t$ で，**準粒子ハミルトニアン中のこの自己エネルギー項は** $\xi^\mu_k$，$\bar{\xi}^\mu_k$ **に関して対角的であること**を要請する。これは自己無撞着なくりこみ条件である。この要請により，真空 $|0\rangle$ が決まることに注意せよ。チルダ共役の下で，$\delta\hat{H}$ は符号を替えるはずなので，その虚数項は $\bar{\xi}\xi$ 項をもてない；もてるのは $\bar{\xi}\tau_3\xi$ のみである。関係 $\bar{\xi}_k\tau_3\xi_k = \bar{a}_k(t)A_k(t)a_k(t)$ を利用すると，この条件は

$$i\left[-\dot{n}_k(t)T_0 + \int[dq]\,s(t)\pi\delta(\omega_k - W)A[N(t)]\right]^{\mu\nu} = i\eta_k(t)A_k(n(t))^{\mu\nu} \tag{9.112}$$

となる。ただし，$\eta_k(t)$ は実数である。これが自己無撞着なくりこみ条件である。先に述べたように，この条件は準粒子ハミルトニアン $\hat{H}_0 + \delta\hat{H}$ が $\xi$ に関して対角的であるという要請と同等である。

(9.112) を解くために，関係 (8.112)：

$$A(n) = T_+ - T_- + 2nT_0 \tag{9.113}$$

を思い出そう。すると (9.112) より，単一の方程式

$$\dot{n}_k(t) = -2\kappa_k(t)n_k(t) + 2\pi C\int[dq]\,\delta(\omega_k - W)n_{q_1}(t)n_{q_2}(t)[1 + n_{q_3}(t)] \tag{9.114}$$

が得られる。ただし，

$$\begin{aligned}\eta_k(t) = \kappa_k(t) &\equiv \int[dq]\,s(t)\pi\delta(\omega_k - W)\\ &= \pi C\int[dq]\,\delta(\omega_k - W)\,\{[1+n_{q_1}(t)][1+n_{q_2}(t)]n_{q_3}(t)\\ &\quad - n_{q_1}(t)n_{q_2}(t)[1+n_{q_3}(t)]\}\end{aligned} \tag{9.115}$$

である。$\kappa_k(t)$ は時間に依存する散逸係数である。(9.114) は，結節点補正を考慮しない 2 ループ自己エネルギー近似における Bogoliubov のパラメータ $n_k(t)$ に対する輸送方程式である。この近似の範囲では**輸送方程式が Boltzmann 方程式の構造をもつ**ので，これを Boltzmann 方程式と呼ぶことにする。これを見ると，非摂動個数 $n_k(t)$ がどのように相互作用の影響を受けるかがわかる。

Boltzmann 方程式 (9.114) の特徴をやや詳しく調べてみよう。$\vec{k}$ の任意の関数 $\phi_k$ を (9.114) の両辺に掛け，$\vec{k}$ に関して積分すると

$$\int d^3k\,\phi_k\dot{n}_k(t) = \frac{(2\pi)^7 C}{2}\int\prod_{i=0}^{3}\left(\frac{d^3q_i}{(2\pi)^3}\right)\delta(0-1-2+3) \\ \times(\phi_3+\phi_2-\phi_1-\phi_0)\,n_0n_1(1+n_2)(1+n_3) \tag{9.116}$$

を得る。ただし，略記法 $\omega_i = \omega_{q_i}$，$\phi_i = \phi_{q_i}$，$n_i = n_{q_i}(t)$，

$$\delta(0-1-2+3) = \delta(\vec{q}_0-\vec{q}_1-\vec{q}_2+\vec{q}_3)\,\delta(\omega_0-\omega_1-\omega_2+\omega_3) \tag{9.117}$$

を導入した。(9.116) の右辺の表式を得るため積分変数をかえる。$\phi_k = 1$ の場合は (9.116) の右辺が消えることはただちにわかる。さらに，デルタ関数の性質 $x\delta(x) = 0$ を利用すると，$\phi_k = \vec{k}$ と $\omega_k$ の場合にも (9.116) の右辺の消えることがわかる。これらより，数密度 $\mathcal{N}$，運動量密度 $\vec{\mathcal{P}}$，エネルギー密度 $\mathcal{E}$ は保存量であることがわかる。なお，これらの量はそれぞれ

$$\mathcal{N} = \int d^3k\,n_k(t) \tag{9.118}$$

$$\vec{\mathcal{P}} = \int d^3k\,\vec{k}\,n_k(t) \tag{9.119}$$

$$\mathcal{E} = \int d^3k\,\omega_k\,n_k(t) \tag{9.120}$$

で定義される。たとえば，エネルギー密度 (9.120) の保存を証明するためには，(9.116) 中の $\phi$ を $\omega$ で置き換える。これらの量が保存量であることより，この系が孤立系であることがわかる。

**問 2**　(9.116) の右辺の表式を導け。

さらに，

$$S(t) = \int d^3k\,\{[1+n_k(t)]\ln[1+n_k(t)] - n_k(t)\ln n_k(t)\} \tag{9.121}$$

で定義されるエントロピー密度 $S(t)$ の振舞いを調べてみよう。積分変数をかえると，

$$\dot{S}(t) = \frac{(2\pi)^7 C}{4} \int \prod_{i=0}^{3} \left( \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \right) \delta(0-1-2+3) \times [n_0 n_1 (1+n_2)(1+n_3) - (1+n_0)(1+n_1) n_2 n_3] \times \ln \frac{n_0 n_1 (1+n_2)(1+n_3)}{(1+n_0)(1+n_1) n_2 n_3} \tag{9.122}$$

を得る。正の $x$，$y$ に対して $(x-y)\ln(x/y) \geq 0$ が成り立つので，(9.122) はエントロピー密度が常に時間とともに増大することを示している。準粒子ハミルトニアンがすべての時間で対角的となることを要請して，準粒子に対する時間依存の Fock 空間を決定したことは，特筆に値する。

**問 3** (9.122) の右辺の表式を導出せよ。

重要な余談：もし $t_0 = \infty$ を採用したとすると（その場合 Feynman 図法により $\alpha = 0$ となる），(9.114) の右辺の符号は替わり，時間とともにエントロピーが減少するという間違った結果が得られる。$\alpha = 1$，$t_0 = -\infty$ なる正しい選択は，閉経路法での経路の選び方と対応している。閉経路法による Boltzmann 方程式の導出は [9] に与えられている。閉経路法には上の考察で重要な役割を果たしたパラメータ $s_k$ がないので，TFD における Boltzmann 方程式の導出が閉経路法のものとどのように関連しているかは明らかでない。

統計力学を量子場に応用して Boltzmann 方程式を導出することは多くの物理学者の興味を引き，この題材に関する膨大な数の論文が存在する。この章では，この題材の TFD による取り扱いのみを紹介した。

## 9.3 時空に依存する TFD

### 9.3.1 Bogoliubov 変換

空間に依存する熱的環境を扱うためには，$a_k = B_k^{-1}\xi_k$ の Bogoliubov 行列 $B_k$ に空間依存性をもたせればよいように思えるかもしれない。それによって $a_k$ の $\vec{x}$ 依存性は導入できるであろう。しかし，このやり方はうまくいかない。それは，交換関係

$$[a_k(t)^\mu, \bar{a}_l(t)^\nu] = \delta_{\mu\nu}\delta(\vec{k} - \vec{l}) \tag{9.123}$$

は $a_k$ の $\vec{x}$ 依存性を許さないからである。

しかし，公式

$$B^{-1}(n)B(N) = 1 - \sigma(n-N)T_0 \tag{9.124}$$

を見ると，いかにして空間に依存する Bogoliubov 変換を導入すればよいかがわかる。ただし，$B(n)$ は個数パラメータ $n$ に依存する Bogoliubov 行列を意味する。この公式と以下で導かれる公式はボソン場とフェルミオン場双方に対して成り立つ；ボソン（フェルミオン）に対しては $\sigma = 1(-1)$.

この節のすべての公式は $\alpha = 1$ と $\alpha = 0$ の両方の場合に成立する。前節で示したように $t_0 = -\infty$ を使うべきであり，したがって $\alpha = 1$ を採用する。

恒等式

$$\int d^3q \int d^3x \int d^3y\, e^{i[-(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{x}+(\vec{l}-\vec{q})\cdot\vec{y}]} \times \left( n[t,\vec{x}:\frac{\vec{k}+\vec{q}}{2}] - n[t,\vec{y}:\frac{\vec{l}+\vec{q}}{2}] \right) = 0 \tag{9.125}$$

に注目せよ。これと (9.124) より，公式

$$\frac{1}{(2\pi)^6}\int d^3q \int d^3x \int d^3y\, e^{i[-(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{x}+(\vec{l}-\vec{q})\cdot\vec{y}]} \times \left( B^{-1}(n[t,\vec{x}:\frac{\vec{k}+\vec{q}}{2}])B(n[t,\vec{y}:\frac{\vec{l}+\vec{q}}{2}]) \right)^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\delta(\vec{k}-\vec{l}) \tag{9.126}$$

を得る。

これは，Bogoliubov 変換

$$a_k(t)^{\mu} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q \int d^3x\, e^{-i(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \times B^{-1}(n[t,\vec{x}:\frac{\vec{k}+\vec{q}}{2}])^{\mu\nu}\xi_q(t)^{\nu} \tag{9.127}$$

$$\bar{a}_k(t)^{\mu} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q \int d^3x\, e^{i(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{x}}\bar{\xi}_q(t)^{\nu} \times B(n[t,\vec{x}:\frac{\vec{k}+\vec{q}}{2}])^{\nu\mu} \tag{9.128}$$

が交換関係 (9.123) を満たすことを示す。ただし，

$$\xi_q(t) \equiv \xi_q e^{-i\int^t ds\,\omega_q(s)} \tag{9.129}$$

$$\bar{\xi}_q(t) \equiv \bar{\xi}_q e^{i\int^t ds\,\omega_q(s)} \tag{9.130}$$

である。真空演算子 $\xi_q$，$\bar{\xi}_q$ は時空に依存しないので，それらの真空 $|0\rangle$ も時空に依存しない。量子エネルギー $\omega_k(t)$ は $\vec{x}$ に依存しないことに注意せよ。その理由は，準粒子非摂動エネルギーが漸近領域（時空変化のある領域から無限に離れた領域）での量子エネルギーで与えられるからである。この状況は，ソリトンのような巨視的物体が存在する場合と同様である（6章を見よ）。しかし，相互作用のため自己エネルギーに $\vec{x}$ 依存性が生まれるので，量子エネルギーは $\vec{x}$ に依存する。これは，非摂動量子エネルギーではない。漸近的エネルギーとしての非摂動エネルギーは，$\vec{x}$ によらない自己エネルギーの部分のみでできている。これがエネルギーのくりこみである。

上の Bogoliubov 変換は逆をもつ。(9.124) を利用すると，

$$\xi_k(t)^\mu = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q \int d^3x\, e^{-i(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \times B(n[t,\vec{x}:\frac{\vec{k}+\vec{q}}{2}])^{\mu\nu} a_q(t)^\nu \tag{9.131}$$

$$\bar{\xi}_k(t)^\mu = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q \int d^3x\, e^{i(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \bar{a}_q(t)^\nu \times B^{-1}(n[t,\vec{x}:\frac{\vec{k}+\vec{q}}{2}])^{\nu\mu} \tag{9.132}$$

が証明できる。

個数パラメータに対する公式を書いて，この小節を閉じることにする。計算により

$$n[t,\vec{x}:\vec{k}] = \int d^3q\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \langle 0|\bar{a}_{k+\frac{q}{2}}(t)^1 a_{k-\frac{q}{2}}(t)^1|0\rangle \tag{9.133}$$

を得る。

### 9.3.2 非摂動ハミルトニアン

上記の Bogoliubov 変換より，場の方程式

$$i\dot{a}_k(t)^\mu = \omega_k(t)a_k(t)^\mu + i\int d^3q\, P(t,\vec{k},\vec{q})T_0^{\mu\nu}a_q(t)^\nu \tag{9.134}$$

$$i\dot{\bar{a}}_k(t)^\mu = -\omega_k(t)\bar{a}_k(t)^\mu$$

$$-i\int d^3q\,\bar{a}_q(t)^\nu T_0^{\nu\mu}P(t,\vec{q},\vec{k}) \tag{9.135}$$

が得られる。ただし，

$$P(t,\vec{k},\vec{q}\,)=P_0(t,\vec{k},\vec{q}\,)+P_1(t,\vec{k},\vec{q}\,) \tag{9.136}$$

であり，

$$P_0(t,\vec{k},\vec{q}\,)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\,e^{-i(\vec{k}-\vec{q}\,)\cdot\vec{x}} \times \dot{n}[t,\vec{x}:\frac{\vec{k}+\vec{q}}{2}] \tag{9.137}$$

$$P_1(t,\vec{k},\vec{q}\,)=i\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\,e^{-i(\vec{k}-\vec{q}\,)\cdot\vec{x}} \times \{\omega_k(t)-\omega_q(t)\}n[t,\vec{x}:\frac{\vec{k}+\vec{q}}{2}] \tag{9.138}$$

を導入した。

これらの方程式は

$$i\dot{a}_k(t)^\mu=[a_k(t)^\mu,\hat{H}_Q(t)] \tag{9.139}$$

$$i\dot{\bar{a}}_k(t)^\mu=[\bar{a}_k(t)^\mu,\hat{H}_Q(t)] \tag{9.140}$$

の形にできる。非摂動ハミルトニアン $\hat{H}_Q$ は

$$\hat{H}_Q(t)=\hat{H}_0(t)-\hat{Q}(t) \tag{9.141}$$

で与えられる。ただし，

$$\hat{H}_0(t)=\int d^3k\,\omega_k(t)\bar{a}_k(t)^\mu a_k(t)^\mu \tag{9.142}$$

であり，

$$\hat{Q}(t)=-i\int d^3k\int d^3lP(t,\vec{k},\vec{l}\,)\bar{a}_k(t)T_0a_l(t) \tag{9.143}$$

である。

なお，

$$\hat{H}_0(t)+i\int d^3k\int d^3lP_1(t,\vec{k},\vec{l}\,)\bar{a}_k(t)T_0a_l(t)=\int d^3k\,\omega_k(t)\bar{\xi}_k\xi_k \tag{9.144}$$

が示せる。これは，真空演算子に対して対角的である。

### 9.3.3 場に対する時空依存 TFD

さて，前の小節での時空依存 TFD を，自由場

$$\varphi(t,\vec{x})^\mu = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, a_k(t)^\mu e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\int ds\,\omega_k(s)} \tag{9.145}$$

$$\bar{\varphi}(t,\vec{x})^\mu = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, \bar{a}_k(t)^\mu e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{i\int ds\,\omega_k(s)} \tag{9.146}$$

を用いて再定式化する。

準粒子場：

$$\xi(t,\vec{x})^\mu = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, \xi_k^\mu e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\int ds\,\omega_k(s)} \tag{9.147}$$

$$\bar{\xi}(t,\vec{x})^\mu = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, \bar{\xi}_k^\mu e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{i\int ds\,\omega_k(s)} \tag{9.148}$$

も導入する。

これらを用いると熱的 Bogoliubov 変換は

$$\varphi(t,\vec{x})^\mu = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3y \int d^3q\, e^{i\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \times B^{-1}(n[t,\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2}:\vec{q}])^{\mu\nu}\xi(t,\vec{y})^\nu \tag{9.149}$$

$$\bar{\varphi}(t,\vec{x})^\mu = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3y \int d^3q\, e^{-i\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \times \bar{\xi}(t,\vec{y})^\nu B(n[t,\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2}:\vec{q}])^{\nu\mu}. \tag{9.150}$$

となる。場の方程式は

$$i\dot{\varphi}(t,\vec{x})^\mu = \omega(-i\nabla)\varphi(t,\vec{x})^\mu + i\int d^3y\, P(t,\vec{x},\vec{y})T_0^{\mu\nu}\varphi(t,\vec{y})^\nu \tag{9.151}$$

$$i\dot{\bar{\varphi}}(t,\vec{x})^\mu = -\omega(i\nabla)\bar{\varphi}(t,\vec{x})^\mu - i\int d^3y\, \bar{\varphi}(t,\vec{y})^\nu T_0^{\nu\mu}P(t,\vec{y},\vec{x}) \tag{9.152}$$

で与えられる。ただし，

$$P(t,\vec{x},\vec{y}) = P_0(t,\vec{x},\vec{y}) + P_1(t,\vec{x},\vec{y}) \tag{9.153}$$

であり，

$$P_0(t,\vec{x},\vec{y}\,) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q\, e^{i(\vec{x}-\vec{y}\,)\cdot\vec{q}} \\ \times\, \dot{n}[t, \frac{\vec{x}+\vec{y}}{2} : \vec{q}\,] \tag{9.154}$$

$$P_1(t,\vec{x},\vec{y}\,) = i\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q\, e^{i(\vec{x}-\vec{y}\,)\cdot\vec{q}} \\ \times\{\omega(-i\nabla_x) - \omega(-i\nabla_y)\}n[t, \frac{\vec{x}+\vec{y}}{2} : \vec{q}\,] \tag{9.155}$$

とおいた。

流れの真空期待値は

$$\langle 0| - \frac{i}{2}\bar{\varphi}(t,\vec{x}\,)\overleftrightarrow{\nabla}\varphi(t,\vec{x}\,)|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\vec{k}\,n[t,\vec{x},\vec{k}\,] \tag{9.156}$$

で与えられることがわかる。ただし，

$$\overleftrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{\nabla} - \overleftarrow{\nabla} \tag{9.157}$$

なる記法を導入した。

この表式を見ると，$n[t,\vec{x},\vec{k}\,]$ が 時刻 $t$，位置 $\vec{x}$ における数密度の Fourier 成分であることが直観的に理解できる。

### 9.3.4 非摂動一体伝播関数

熱的 Bogoliubov 変換により，非摂動一体伝播関数は次のようになる：

$$\Delta_c(t,\vec{x}:t',\vec{x}'\,) \equiv -i\langle 0|T[\varphi(t,\vec{x})\bar{\varphi}(t',\vec{x}'\,)|0\rangle \tag{9.158}$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^9}\int d^3k\int d^3k'\int d^3y\int d^3y'\int d^3l \\ \times\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y}\,)}e^{-i\vec{k}'\cdot(\vec{x}'-\vec{y}'\,)}e^{i\vec{l}\cdot(\vec{y}-\vec{y}'\,)}e^{-i\int_{t'}^{t} ds\,\omega_l(s)} \\ \times\, B^{-1}(n[t,\vec{y},\frac{\vec{k}+\vec{l}}{2}])\begin{bmatrix}\theta(t-t') & 0\\ 0 & -\theta(t'-t)\end{bmatrix} \\ \times\, B(n[t',\vec{x}',\frac{\vec{k}'+\vec{l}}{2}]). \tag{9.159}$$

これは，対角行列が Bogoliubov 行列の間にはさまれた項の多重積分で構成されている。

これは摂動計算における Feynman 図の内線である。補正された一体伝播関数の導出や，非摂動個数 $n[t, \vec{x} : \vec{k}]$ の時空依存性を記述する Boltzmann 方程式の（自己無撞着なくりこみ条件による）導出は，9.2 節で調べた時間依存 TFD の場合と同様にしてなされる。摂動の 2 次近似の範囲で自己エネルギー図を計算し殻上自己エネルギー部分を抽出すると，自己エネルギーの寄与が準粒子ハミルトニアンに生ずることが確かめられている。また，自己無撞着なくりこみ条件から非一様な熱過程に対する Boltzmann 方程式が導びき出せることも確認されている。

## 9.4 観測粒子と準粒子

t 表示の TFD により準粒子概念の特筆すべき性質が明らかにされた。**準粒子演算子 $(\xi_k^\mu, \bar{\xi}_k^\mu)$ は Fock 空間を構築するものとして定義される**。つまり，準粒子演算子はダイナミカルマップを記述するものである。このように定義された準粒子は相互作用表示の振動子演算子 $(a_k(t), \bar{a}_k(t))$ とは異なる。後者の演算子は観測粒子を記述する。

t 表示 TFD によると準粒子は安定である。これは，準粒子演算子に対する基本的な要請のように見える。熱過程の下では観測粒子と準粒子との時間依存性にずれが生ずる。そのずれは，相互作用表示の振動子演算子を準粒子演算子で書き下した，時間に依存する表式（ダイナミカルマップ）で記述される。この表式が時間に依存する Bogoliubov 変換である。観測粒子と準粒子との間の相違のため，熱平衡 TFD で用いられた用語に変更が必要となる。そこで用いられていた「散逸する準粒子」ということばは,「散逸する観測粒子」と改められなければならない。小節 8.1.3 の (8.59) で示したように，熱平衡 TFD における観測粒子の熱散逸は，時間に依存する Bogoliubov 行列で扱うことができる。

上の考察により，小節 8.1.3 の疑問に答えることができる。準粒子ハミルトニアンは $\hat{H}_0$ であり，熱平衡 TFD における非摂動ハミルトニアンは $\hat{H}_{prop}$ である。しかし，散逸の影響が摂動的である場合には，後者の代わりに $\hat{H}_0$ を使うことができる。時間に依存する TFD における非摂動ハミルトニアンは $(\hat{H}_{prop} - \hat{Q})$ である。この章で行ったように，散逸効果が摂動的であるならば，ここでもまた $(\hat{H}_0 - \hat{Q})$ を非摂動ハミルトニアンとして採用することができる。

## 9.5 コメント

8 章で議論された t 表示での熱平衡 TFD によると，単一の準粒子が熱ゆらぎをともなう状態を通り抜けていくことがわかる。2 体伝播関数の重心座標に対しても同様の議論が適用できるだろう。2 体粒子状態もまた，熱ゆらぎをともなう状態を通り抜けていくという結果が期待される。これは,「高エネルギー粒子衝突の間に熱の影響が強く現われるだろう」という描像と矛盾しない。

t 表示におけるこの種の考察が本物となるためには，さらに詳細に体系を練り上げていく必要がある。場の量子論には多数の異なる相の存在することがわかっている。常伝導相と超伝導相を有する金属中における電子気体の系を考えてみよう。短時間の現象は熱ゆらぎのため両方の相を含むであろう。この場合には，熱的 Bogoliubov 変換は，チルダと非チルダ成分（熱的二重項）をもつばかりでなく，上向きスピンと下向きスピンの成分（南部二重項）をももっている。つまり，熱的 Bogoliubov 変換は 4 行 4 列の行列で表わされる [6, 10]。しかも，両相の中間的状態も考えに入れなくてはならないので，それは二つの 2 行 2 列の行列の単純な直積ではない。このことから，熱的 Bogoliubov 変換は一般には高次元行列で与えられることがわかる。

9.1 節で指摘したように，TFD におけるくりこみとは，相互作用の影響で補正された多くのパラメータを計算することだけを意味している。非摂動パラメータとして補正されたパラメータをとることはすすめられない。たとえば，時空依存 TFD は非摂動エネルギーとして時間に依存する量子エネルギー $\omega_k(t)$ を採用して定式化されているが，非摂動エネルギーとして時間に依存しない $\omega_k$ をとった方がより有効に見える。自己エネルギーのずれ $\delta\omega_k(t)$ は時間に依存しているが，時間に依存しない $\omega_k$ で計算を始め，時間に依存する量子エネルギーを $\omega_k(t) = \omega_k + \delta\omega_k(t)$ として導出するのである。時間に依存しない非摂動 $\omega_k$ としては，$t_0 = \infty$ における $\omega_k = \omega_k(t_0)$ を採用するのがよかろう。数密度パラメータに関しても，非摂動個数 $n_k(t)$ ではなく Heisenberg の個数 $n_{Hk}(t)$ をとって議論を始めることはできない。このことは熱平衡 TFD を調べてみれば明白である。熱平衡状態では非摂動 $n_k$ は Boltzmann 分布で与えられるが，$n_{Hk}$ はそれをスペクトル関数 $\rho$ の重みで積分したものである：

$$n_{Hk} = \int d\kappa\, \rho(\kappa)\, n_k(\kappa). \tag{9.160}$$

関数 $\rho$ は $\kappa = \omega_k$ にピークをもち，幅が $\kappa_k$ である。散逸定数 $\kappa_k$ は消えないので，$\rho$ はデルタ関数ではない。これは二つのことを意味している。一つは，観

測されるスペクトルが熱平衡スペクトルのまわりに散逸定数程度のエネルギーのゆらぎをともなうことである。もう一つは，非摂動 $n_k$ として $n_{Hk}$ は使えないことである。

この章では，主に孤立系に対する TFD を考察した。外界に向かう散逸エネルギーの正味の流れが存在する場合には，散逸をともなったハミルトニアンを非摂動ハミルトニアンとして採用するのが適切である。実は，時間に依存する TFD は，その場合に対して初めて定式化されたのである [5, 6]。これらの状況での TFD の応用がある [11, 12, 13, 14, 15]。

共変時間微分の導入は，時間依存 TFD がゲージ理論に拡張できる可能性を示唆する。本書ではパラメータ $\alpha_k$，$s_k$ として特定の値を選んだので，熱的生成子 $\hat{Q}$ は一種類しか得られなかった。三つのパラメータ $\alpha_k$，$s_k$，$n_k$ の時間依存性を許すと，SU(1,1) 代数を形成する三つの生成子が得られる。SU(1,1) ゲージ理論の可能性とその位相構造は Henning らによって調べられた [8]。一つのパラメータ $n_k$ の時間依存性だけを許した場合にも，$(\vec{x}, t)$ 空間に付随したトポロジーをもつゲージ理論が定式化できる可能性がある。これらは興味深い可能性である。

本書では，主に場の量子論の概念に基づいて TFD の建設を試みた。それと平行して，統計力学における知識を利用して TFD を洗練する試みもなされている。時間依存 TFD の体系は，揺動力演算子をともなった確率微分方程式（量子場に対する Langevin 方程式，確率的 Liouville 方程式など）も取り込むことができる [16, 17]。この章で与えられた取り扱いに加えて，この方向での研究は，あたかも Einstein による熱現象の確率的解釈が，技巧的なアンサンブル理論による Gibbs の解釈よりも直観的な熱の理解をもたらしたのと同じように，熱現象のより深い理解を可能にするであろう。流体力学的ステージを扱う非平衡熱力学における概念を，時間依存 TFD へ移植する試みもなされている [18]。論文 [19] には，非平衡統計力学に基づいて非平衡 TFD を発展させる試みの興味深い記述がある。

TFD の体系が完全な形で完成されると，微視的世界と巨視的世界（熱の影響を含んだ）を統一的観点でとらえることができるであろう。

## 参考文献

[1] H. Umezawa and Y. Yamanaka, *Mod. Phys. Lett.* **A7** (1992) 3509.

[2] Y. Yamanaka, H. Umezawa, K. Nakamura and T. Arimitsu, *Mod. Phys.* **A9** (1994) 1153.

[3] K. Nakamura, H. Umezawa and Y. Yamanaka, *Mod. Phys. Lett.* **A7** (1992) 3583.

[4] K. Watanabe, K. Nakamura and H. Ezawa, in H. Ezawa, T. Arimitsu and Y. Hashimoto, editors, *Thermal Field Theories*, (North-Holland, Amsterdam, 1991), p. 79.

[5] T. Arimitsu and H. Umezawa, *Prog. Theor. Phys.* **74** (1985) 429.

[6] T. Arimitsu, M. Guida and H. Umezawa. *Physica* **148A** (1988) 1.

[7] H. Umezawa and Y. Yamanaka, *Advances in Physics* **37** (1988) 531.

[8] P. A. Henning, M. Graf and F. Matthäus, *Physica* **A182** (1992) 489.

[9] St. Mrowczyuski and P. Danielewicz, *Nucl. Phys.* **B342** (1990) 345.

[10] I. Hardman, H. Umezawa and Y. Yamanaka, In K. L. Kowalski, N. P. Landsman and Ch. G. van Weert, editors *Themal Field Theories and Their Applications*, *Physica* **158A** (1989) 326.

[11] M. Ban and T. Arimitsu, *Physica* **146A** (1987) 89.

[12] T. Tominaga, M. Ban, T. Arimitsu, J. Pradko and H. Umezawa, *Physica* **149A** (1988) 26.

[13] T. Tominaga, T. Arimitsu, J. Pradko and H. Umezawa, *Physica* **150A** (1988) 97.

[14] T. Iwasaki, T. Arimitsu and F. H. Willeboordse. In H. Ezawa, T. Arimitsu, and Y. Hashimoto, editors, *Thermal Field Theories*, (North-Holland, Amsterdam, 1991) p. 469.

[15] T. Arimitsu, F. H. Willeboordse and T. Iwasaki, *Physica* **182A** (1992) 214.

[16] T. Arimitsu, *Phys. Lett.* **153A** (1991) 163.

[17] T. Arimitsu, in H. Ezawa, T. Arimitsu, and Y. Hashimoto, editors, *Themal Field Theories*, (North-Holland, Amsterdam, 1991) p. 207.

[18] T. Arimitsu, *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** (1991) L1415.

[19] D. N. Zubarev and M. V. Tokarchuk, *Teoreticheska i Matematicheskaya Fizika* **88** (1991) 286.

# 10

# 付録（日本語版に寄せて）

本書の英語版が出版されてから，TFD にいくつかの重要な進展があった。そのうちのいくつかを，この付録で簡単にまとめたい。より詳しい解説は，[1] に与えられている。[2, 3] も参照されたい。

## 10.1　チルダ共役の規則，熱的二重項，B 行列と Green 関数

8 章と 9 章では，簡単のため主に 1 型の量子場を扱った。そこでは，チルダ演算を任意の場の演算子 $A$ へ 2 回施したときの規則として，$\tilde{\tilde{A}} = \sigma A$ を採用した。しかし，2 型の場を扱うには，規則 $\tilde{\tilde{A}} = A$ が必要であることがわかっている。

$[a, a^\dagger]_\sigma = 1$ を満たす振動子演算子 $a$ を考え，$\tilde{\tilde{a}} = a$ を仮定しよう [4, 1, 2, 3, 5]。チルダ共役の他の規則は変えずにそのままにしておく。チルダ共役により，$a\tilde{a} \to \tilde{a}a = \sigma a\tilde{a} +$ c 数 を得る。したがって，たとえ c 数を無視しても，フェルミオンでは $a\tilde{a}$ はチルダ不変ではない。フェルミオンでは $\sqrt{\sigma} = i$ であり，これはチルダ共役で符号を替えるので，$\sqrt{\sigma}a\tilde{a}$ がチルダ不変である（ c 数のずれは別として)。これは，$|0\rangle$ と $\langle 0|$ への対凝縮である。真空はチルダ不変であるので，Bogoliubov 生成子 $G$ 中の $a\tilde{a}$ 項は $\sqrt{\sigma}a\tilde{a}$ で置き換えられなければならない。結局，Bogoliubov 変換によって $a$ と $\sqrt{\sigma}\tilde{a}^\dagger$ が混ざるのである：

$$\xi = ca + d\sqrt{\sigma}\tilde{a}^\dagger \tag{10.1}$$

$$\tilde{\xi}^\dagger = c\tilde{a}^\dagger + d\sqrt{\sigma}a. \tag{10.2}$$

ただし，$c$ と $d$ は $c^2 - \sigma d^2 = 1$ を満たすものである。

### 10.1.1 熱的二重項

熱的二重項 $a^\mu$ として

$$a^\mu:\ a^1 = a,\ a^2 = \sqrt{\sigma}\tilde{a}^\dagger \tag{10.3}$$

を採用するのが自然である [2, 3]。$\hat{H}_0$ は Bogoliubov 変換の下に不変であるから，$a^\dagger a - \sigma\tilde{a}\tilde{a}^\dagger - \sigma$ と等しい $(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger\tilde{a})$ もそのはずである。$\bar{a}^\mu$ を

$$\bar{a}^\mu:\ \bar{a}^1 = a^\dagger,\ \bar{a}^2 = -\sqrt{\sigma}\tilde{a} \tag{10.4}$$

で定義すると，これは $\bar{a}^\mu a^\mu - \sigma$ となる。このように，Bogoliubov 変換で $\bar{a}^\mu a^\mu$ が不変という要請によって $\bar{a}^\mu$ を導入した。

### 10.1.2 Bogoliubov 行列

パラメータを三つ含む Bogoliubov 変換の一般形は

$$\xi^\mu = B^{\mu\nu}a^\nu,\ \bar{\xi}^\mu = \bar{a}^\nu[B^{-1}]^{\nu\mu} \tag{10.5}$$

$$B = (1+\sigma n)^{1/2}e^{s\tau_3}\begin{bmatrix} 1 & -\sigma f^\alpha \\ -f^{1-\alpha} & 1 \end{bmatrix} \tag{10.6}$$

$$B^{-1} = (1+\sigma n)^{1/2}\begin{bmatrix} 1 & \sigma f^\alpha \\ f^{1-\alpha} & 1 \end{bmatrix}e^{-s\tau_3} \tag{10.7}$$

である。本文と同様，Feynman 図とつじつまが合い，しかも $B$ が $n$ に関して線形であるように，$\alpha = 1$ と $s = \ln[1+\sigma n]^{1/2}$ を採用する。結局，

$$B[n] = \begin{bmatrix} 1+\sigma n & -\sigma n \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.8}$$

$$B^{-1}[n] = \begin{bmatrix} 1 & \sigma n \\ 1 & 1+\sigma n \end{bmatrix} \tag{10.9}$$

を得る。

### 10.1.3 熱的状態条件

上の変換よって，

$$\xi \propto [a - \sigma\sqrt{\sigma}f\tilde{a}^\dagger] \tag{10.10}$$

$$\xi^\dagger \propto [a^\dagger - \sqrt{\sigma}f\tilde{a}] \tag{10.11}$$

と，そのチルダ共役が得られる。本文と同様の手続きによって，

$$A|0\rangle = \sigma\sqrt{\sigma}f^{-\hat{N}}\tilde{A}^{\dagger}|0\rangle \tag{10.12}$$

$$\langle 0|A = \sqrt{\sigma}\langle 0|\tilde{A}^{\dagger} \tag{10.13}$$

を得る。ただし，$\hat{N} \equiv a^{\dagger}a - \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}$ である。$A$ は $(a, a^{\dagger})$ のみで構成されている。これらが熱的状態条件である。これらの関係は，多種類の振動子 $(a, b, \cdots)$ の組合せに関しても正しく成り立つ。なお，2 回のチルダ演算に対して $\tilde{\tilde{a}} = a$ を採用した。$\tilde{\tilde{a}} = \sigma a$ を採用すると，熱的状態条件に複雑な符号因子が出て，Feynman 図規則の成立をだいなしにしてしまう。そこで，最近はより簡便な規則 $\tilde{\tilde{a}} = a$ が採用されている。

ブラ真空に対する熱的状態条件は簡単な形で与えられる：

$$\langle 0|\hat{A}(t) = 0. \tag{10.14}$$

ただし，$\hat{A} \equiv A - \sqrt{\sigma}\tilde{A}^{\dagger}$ である。

### 10.1.4　熱カウンター項

9 章で見たように，非摂動の物理的場（$a(t)$ 演算子）のハミルトニアンは，「熱カウンター項」$\hat{Q}$ を含んでいる：

$$\hat{H}_Q(t) = \hat{H}_0(t) - \hat{Q}(t). \tag{10.15}$$

現在の処方では，熱カウンター項は（運動量の添え字をつけると）

$$\hat{Q}(t) = i\sigma\int d^3k\, \dot{n}_k(t)\bar{a}_k(t)T_0 a_k(t) \tag{10.16}$$

の形で与えられる。ただし，

$$T_0 \equiv \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{10.17}$$

である。

$$\bar{a}T_0 a = (a^{\dagger} - \sqrt{\sigma}\tilde{a})(a - \sqrt{\sigma}\tilde{a}^{\dagger})$$

であるので，熱的状態条件より

$$\langle 0|\hat{Q}(t) = 0 \tag{10.18}$$

を得る。また，$\widetilde{\hat{Q}} = -\hat{Q}$ も得られる。結局，熱カウンター項の存在する時間依存の場合にも Fenman 図法が利用できる。

### 10.1.5 2点関数の一般的性質

熱的二重項の定義を一般の演算子に拡張すると便利である。熱的二重項の一般的定義は

$$A^1 = A,\ A^2 = \sqrt{\sigma}\tilde{A}^\dagger \tag{10.19}$$

$$\bar{A}^1 = A^\dagger,\ \bar{A}^2 = -\sqrt{\sigma}\tilde{A} \tag{10.20}$$

である。ただし，$A$ は非チルダ演算子のみで構成されている任意の演算子である。

さて，2点関数：

$$G_{AB}(t,t') \equiv -i\langle 0|TA^\mu(t)\bar{B}^\nu(t')|0\rangle \tag{10.21}$$

を考えよう。本文で見たように，2点関数の一般形は，三角行列が Bogoliubov 行列ではさまれた構造をもつ：

$$G_0(t,t') \equiv B[n(t)]G_{AB}(t,t')B^{-1}[n(t')] = \begin{pmatrix} G_r(t,t') & g_{12}(t,t') \\ 0 & G_a(t,t') \end{pmatrix}. \tag{10.22}$$

ただし，$G_r$，$G_a$ は遅延と先進関数である：

$$G_r(t,t') = -i\theta(t-t')\rho_{AB}(t,t'),\quad G_a(t,t') = i\theta(t'-t)\rho_{AB}(t,t') \tag{10.23}$$

$$\rho_{AB} \equiv \langle 0|[A(t)B^\dagger(t') - \sigma B^\dagger(t')A(t)]|0\rangle. \tag{10.24}$$

また，$g_{12}$ は

$$g_{12}(t,t') \equiv i\sigma[(1+\sigma n(t'))\theta(t-t')$$

$$+ (1+\sigma n(t))\theta(t'-t)]\langle 0|B^\dagger(t')A(t)|0\rangle \tag{10.25}$$

$$- i\sigma[n(t')\theta(t-t') + n(t)\theta(t'-t)]\langle 0|A(t)B^\dagger(t')|0\rangle] \tag{10.26}$$

で与えられる。$n(t)$ や $n(t')$ の変化は $g_{12}$ のみに影響する。$n(t) = n(t')\,(= n)$ のときは，$g_{12}$ は簡単な形になる：

$$g_{12}(t,t') = i\sigma[(1+\sigma n)\langle 0|B^\dagger(t')A(t)|0\rangle - n\langle 0|A(t)B^\dagger(t')|0\rangle]. \tag{10.27}$$

これより，$t=t'$ の場合の $g_{12}$ が簡単な形をもつことがわかる。後で見るように，$t=t'$ の場合の $g_{12}$ は，輸送方程式を導出する際に重要な役割をする。

### 10.1.6 準粒子伝播関数

考えている Fock 空間での粒子は準粒子 ($\xi$-particles) である。その伝播関数は，対角行列

$$\langle 0|T[\xi_k(t)^\mu\ \bar{\xi}_l(t')^\nu]|0\rangle = \Theta(\omega : t,t')^{\mu\nu}\delta(\vec{k}-\vec{l}) \tag{10.28}$$

で与えられる。ただし，

$$\Theta(\omega : t,t') \equiv e^{-i\int_{t'}^{t} ds\,\omega(s)} \begin{pmatrix} \theta(t-t') & 0 \\ 0 & -\theta(t'-t) \end{pmatrix} \tag{10.29}$$

である。これは明らかに，

$$\left[\frac{d}{dt}+i\omega(t)\right]\Theta(\omega : t) = -\delta(t) \tag{10.30}$$

を満たす。なお，ここでは量子エネルギー $\omega(t)$ が時間に依存する場合も考慮した。

### 10.1.7 非摂動 $a$ 場伝播関数

非摂動の $a$ 伝播関数は

$$\Delta_k(t,t')^{\mu\nu}\delta(\vec{k}-\vec{l}) \equiv \langle 0|T[a_k(t)^\mu \bar{a}_l(t')^\nu]\tau_3|0\rangle \tag{10.31}$$

で定義される。これは

$$\Delta_k(t,t') = B_k^{-1}(t)\Theta(\omega : t,t')B_k(t')\tau_3 \tag{10.32}$$

となる。これより

$$\left[\frac{d}{dt}+i\omega(t)-iP_k(t)\right]\Delta_k(t,t') = \delta(t-t')\tau_3 \tag{10.33}$$

が得られる。ただし，$P_k(t)\equiv i\sigma\dot{n}_k T_0$ とおいた。簡単な計算で [2, 3]

$$\begin{aligned}\Delta_k(t,t') = e^{-i\int_{t'}^{t} ds\,\omega_k(s)} &[n_k(t')\,\theta(t-t')T_1 T[f_k(t')] \\ &+ \sigma[1+\sigma n_k(t)]\theta(t'-t)T[f_k^{-1}(t)]T_1]\end{aligned} \tag{10.34}$$

を得る。$f$ が $n$ と $n_k = \frac{1}{f_k^{-1} - \sigma}$ の関係にあるので，

$$\sigma[1 + \sigma n_k] = \sigma f_k^{-1} n_k = -\frac{1}{f_k - \sigma} \tag{10.35}$$

である。ここで，任意の関数 $g$ に対して，記法

$$T_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ T[g] \equiv \begin{pmatrix} g^{-1} & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \tag{10.36}$$

を採用した。

## 10.2　二重項列ベクトル代数

計算を簡単にするために，二重項列ベクトル：

$$\Gamma^{(1)} \equiv \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{10.37}$$

を導入しよう。

2×2 行列

$$\Gamma^{(2)} \equiv \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} T_1 \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \tag{10.38}$$

を次の記号で表わすことにする：

$$\Gamma^{(2)} = \left( \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \right) \tag{10.39}$$

これは高次元に拡張できて

$$\Gamma^{(n)} \equiv \left( \begin{Bmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \end{Bmatrix} \cdots \begin{Bmatrix} a_1^{(n)} \\ a_2^{(n)} \end{Bmatrix} \right) \equiv \prod_j^n a_{i_j}^j \tag{10.40}$$

となる。これは $n$ 点 Green 関数と関連している。

これらの記号を利用すると，非摂動 $a$ 伝播関数は

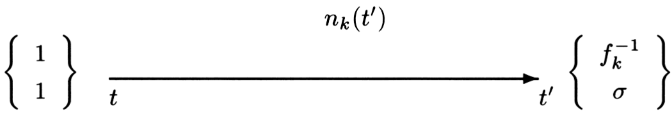
$$\Delta_k(t, t') = e^{-i \int_{t'}^{t} ds\, \omega_k(s)}\, d_k(t, t') \tag{10.41}$$

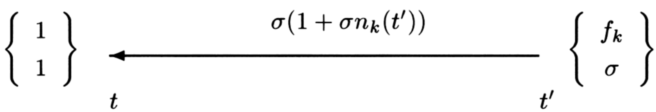
と書ける。ただし，

$$d_k(t,t') = \theta(t-t')n_k(t') \left( \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} f_k^{-1}(t') \\ \sigma \end{matrix} \right\} \right) + \sigma[1+\sigma n_k(t)]\theta(t'-t) \left( \left\{ \begin{matrix} f_k(t) \\ \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right) \tag{10.42}$$

である。

$t > t'$ のとき，右向き矢印の Feynman 線と左向き矢印の Feynman 線は，次の図中の構造をもつ（矢印は $a$ から $\bar{a}$ に向かう）。




内部結節点に対応した列ベクトルは内積を形作る：

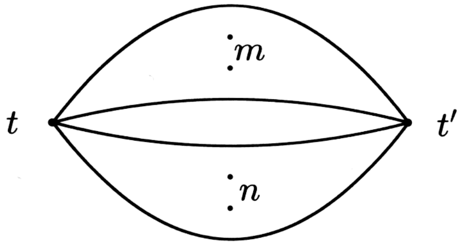
$$\left\{ \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} a_2 \\ b_2 \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} a_3 \\ b_3 \end{matrix} \right\} \cdots \left\{ \begin{matrix} a_l \\ b_l \end{matrix} \right\} \equiv \prod_{i=1}^{l} a_i - \prod_{i=1}^{l} b_i \tag{10.43}$$

これは c 数因子である。一方，外部結節点に対応した列は，外積

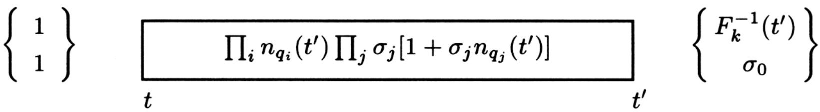
$$\left\{ \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \end{matrix} \right\} \times \left\{ \begin{matrix} a_2 \\ b_2 \end{matrix} \right\} \times \cdots \times \left\{ \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} a_1 \cdots a_n \\ b_1 \cdots b_n \end{matrix} \right\} \tag{10.44}$$

をなす。これらの規則に基づいた非常に簡単な計算方法が [6, 7] にある。

この計算方法の応用の一例として，9.2.5 節の自己エネルギーの計算を示そう。$n$ 本の線 $(i = 1 \cdots n)$ が $t$ に左へ向かい，$m$ 本の線 $(j = 1 \cdots m)$ が $t'$ に右へ向かう 2 結節点自己エネルギー図を考えよう（以下の図を見よ）。簡単のため，量子エネルギー $\omega$ は時間に依存しないと仮定する。これを時間依存の $\omega$ に拡張するのは容易である。




$t > t'$ のとき，これは次の線として作用する：




なお，両端の列は，外部結節点の外積の規則より得られる。以上では，次の記法を用いている：

$$\sigma_0 \equiv \prod_i \sigma_i \prod_j \sigma_j \tag{10.45}$$

$$F(t) = \prod_{i=1}^{n} f_{q_i}(t) \prod_{j=1}^{m} f_{q_j}^{-1}(t). \tag{10.46}$$

$$N(t) = \frac{1}{F^{-1}(t) - \sigma_0} \tag{10.47}$$

$$s(t) = \frac{1}{N(t)} \prod_{i=1}^{n} n_{q_i}(t') \prod_{j=1}^{m} \sigma_j [1 + \sigma_j n_{q_j}(t')] \tag{10.48}$$

と定義すると，上記の自己エネルギーは $t > t'$ に対して

$$\theta(t - t') s(t') N(t') \left( \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} F^{-1}(t') \\ \sigma_0 \end{matrix} \right\} \right) \tag{10.49}$$

となる。$t < t'$ の場合も同様に計算できる。合わせると，$\Sigma_k$ として

$$i\Sigma_k(t,t') = \int [dq]\, e^{-iW(t-t')} \Bigg[\theta(t-t')s(t')N(t') \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F^{-1}(t') \\ \sigma \end{Bmatrix} \right) + s(t)\sigma[1+\sigma N(t)]\theta(t'-t) \left( \begin{Bmatrix} F(t) \\ \sigma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) \Bigg] \tag{10.50}$$

を得る。ただし，記法

$$\frac{[dq]}{(2\pi)^3} = \prod_{i=1}^{n} \left( \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \right) \prod_{j=1}^{m} \left( \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^3} \right) \delta(\vec{k} - \sum_{i=1}^{n} \vec{q}_i + \sum_{j=1}^{m} \vec{q}_j) \tag{10.51}$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} \omega_{q_i} - \sum_{j=1}^{m} \omega_{q_j} \tag{10.52}$$

を導入した。この自己エネルギーは，

$$\Sigma_k(t,t') = -i \int [dq]\, B^{-1}[N(t)] \begin{pmatrix} s(t') & 0 \\ 0 & s(t) \end{pmatrix} \Theta(W : t-t') B[N(t')] \tag{10.53}$$

と記すこともできる。新しい方法により自己エネルギーの計算は飛躍的に簡単なものとなった。

## 10.3　対角化と輸送方程式

9 章では，殻上自己エネルギーを対角化することによって輸送方程式を得た。しかし，量子エネルギー $\omega(t)$ が時間に依存するときは，殻上自己エネルギーを定義することは難しい。より一般的な原理が必要である。

そのような原理を発見するためには，2 点関数の一般形を与える式 (10.22) を思い出せばよい：

$$G(t,t') = B^{-1}[n(t)] \begin{pmatrix} G_r(t,t') & g_{12}(t,t') \\ 0 & G_a(t,t') \end{pmatrix} B[n(t')]. \tag{10.54}$$

熱的な散逸のため $a$ 粒子が不安定であることも思い出そう。ダイナミカルマップを $a = B^{-1}\xi + \cdots$（点々は高次のＮ積）と書くと，熱的不安定性はこの高次

N 積から生まれていることがわかる。したがって，$|t-t'| \ll$ 寿命 のとき，この関係式中の三角行列は $\xi$ 粒子の伝播関数のように振る舞う。$\xi$ 粒子は熱効果とは無縁なので，その伝播関数が対角的でなければならないことより，対角化条件

$$g_{12}(t,t) = 0 \tag{10.55}$$

を得る。$\dot{n}$ に関する輸送方程式はこれから得られる。この輸送方程式は，$\omega$ が時間に依存しないとき，9 章のものに帰着することが示せる。9 章で見たように，エントロピー則はこの輸送方程式から得られる。この対角化条件は非平衡 TFD で重要な働きをする。従来の統計力学では，時間平均とアンサンブル平均同一則が基礎的な役割をしている。TFD では，アンサンブルの概念は消去された。対角化条件がアンサンブル平均と時間平均同一則にとって代わったのである。

## 参考文献


[1] H. Umezawa, Equilibrium and Non-Equilibrium Thermal Physics, Banff/CAP Workshop on Thermal Field Theory, ed. F. C. Khanna, R. Kobes, G. Kunstatter and H. Umezawa (World Science Pub., 1994)

[2] H. Chu and H. Umezawa, *A Unified Formalism of Thermal Quantum Field Theory*, Intern. Jour. Mod. Phys. A9, No. 14 (1994).

[3] H. Chu and H. Umezawa, *Stable Quasi-Particle Picture in Thermal Quantum Field Physics*, Intern. Jour. Mod. Phys. A9, 1703-1729 (1994).

[4] I. Ojima, *Ann. of Phys.* 137, 1(1981).

[5] P. Henning and H. Umezawa, *Diagonalization of Propagators in Thermo Field Dynamics for Relativiatic Quantum Fields*, Nucl. Phys. B 417 p. 463-505 (1994).

[6] H. Chu and H. Umezawa, *Time ordering theorem and calculation recipes for thermo field dynamics*, Physics Letters A177, 385 (1993).

[7] H. Chu, *Feynman Diagram Recipes in TFD*, Banff/CAP Workshop on Thermal Field Theory, ed. F. C. Khanna, R. Kobes, G. Kunstatter and H. Umezawa (World Science Pub., 1994).

# 訳者あとがき

本書では，場の量子論で明らかにされた**真空の属性**という概念が，どこまで自然認識の基本的概念として通用するかが追求された。**演算子代数**と**表現空間**という場の量子論の二重構造を利用し，**自発的対称性の破れ**によって真空が示す多様な形態を明らかにしてきたのである。それによって，秩序状態，巨視的物体，熱平衡分布，さらには非平衡分布まで一貫した概念で捉らえることに成功した。

9 章で扱われた，いわゆる非平衡 TFD（NETFD）では，散逸現象を場の量子論的な手法でまともに扱おうという試みがなされている。Boltzmann は，微視的で可逆な Newton 力学から出発して自然界の不可逆性を導出しようとした。しかし，Boltzmann 方程式を導く際に，**分子混沌**と呼ばれる確率操作を，知らずに導入していたのである（そのあたりのからくりの簡単な解説は，たとえば [1] を参照のこと）。本書で示された新しい方法によって，Boltzmann がはじめ描いた夢をなんらかの形で実現させせられるのではないかという期待がわいてくる。Boltzmann の時代には場の量子論はなく，この二重構造は認識されていなかったのである。

非平衡統計力学における基本的な観点は四つに分類される。第一の Boltzmann による観点は，分子混沌の仮定や，不可逆性を産み出すそれと同等な仮定の下に，一粒子分布関数（古典統計力学では，$\mu$-位相空間）が扱われるものである。第二の Gibbs による観点では，調べている系の**アンサンブル**の分布を記述する密度演算子が取り扱われる。古典統計力学の言い方では，$\Gamma$-位相空間での代表点の集まりを扱うのである。それぞれの代表点は，アンサンブルのサンプル系

の運動状態を表わしている。不可逆性は，$\Gamma$-空間の粗視化によって導入される。第三の Einstein による観点では，ある確率過程（揺動力に対する）で規定された確率微分方程式に従って時間発展する物理量の経路を調べる。揺動力の時間相関によって，系の不可逆性が導入される。第四の久保亮五による観点 [2, 3] では，位相空間中の経路の束の分布が扱われる。確率過程の揺動力サンプルに従って，各時刻の位相空間に流れのパターンが現われる。系の運動状態を表わす代表点が，時間的にパターンを通過してできる経路は，対応した Langevin 方程式によって規定される経路とまったく同じものである。

量子系に対してこの四つの観点を一貫した形で定式化することは，今まで成功していなかった。それは，NETFD の体系において，はじめて可能となった [4, 5, 6, 7, 8]。それぞれの観点の間の関係は，図にその構造を示してある。図の左半分が Heisenberg 表示，右半分が Schrödinger 表示を基礎にした観点を与えている。揺動力を考慮に入れた確率微分方程式による観点は，一番下の列に記されている。Langevin 方程式と確率 Liouville 方程式の関係は，量子力学や場の量子論における Heisenberg 方程式と Schrödinger 方程式との関係と同じである。確率微分方程式には伊藤 (I) 型 [9] と Stratonovich(S) 型 [10] の 2 種類の積（確率積）があるため，それぞれに対応した表式が示されている。S 型の Langevin 方程式は通常の Heisenberg 方程式と同じ構造をしているが，I 型には確率微分の違いによる余分な項が現れる。確率 Liouville 方程式の揺動力平均をとると，対応した Fokker-Planck 方程式が得られる。Fokker-Planck 方程式に付随するハミルトニアン $\hat{H}$ を用いると，粗視化された演算子に対する Heisenberg 方程式が得られる。粗視化された演算子の Heisenberg 運動方程式の存在が，散逸量子場に対する正準理論の定式化を可能にしたのである。揺動力平均と真空期待値をとった物理量の運動方程式を得るには，二つの方法がある。一つは，Langevin 方程式の揺動力平均と真空期待値をとる方法で，もう一つは，Fokker-Planck 方程式を利用して物理量に対応した演算子の真空期待値をとる方法である。いずれの方法によっても結果は一致する。なお，Boltzmann 方程式は，この期待値方程式として与えられる。この一貫した量子正準理論全体を建設するにあたって，量子確率 Liouville 方程式の発見が本質的であった [4]。

揺動力演算子に関する表現空間は数学者によってすでに構築されている [11, 12, 13]。それを拡張して NETFD にとりこむ試みもなされている [8, 14]。散逸の解釈に超関数の関与を考慮するという捉え方が最近発展してきているが，そこでは艤装（rigged）Hilbert 空間との関わりを踏まえた議論が必要である

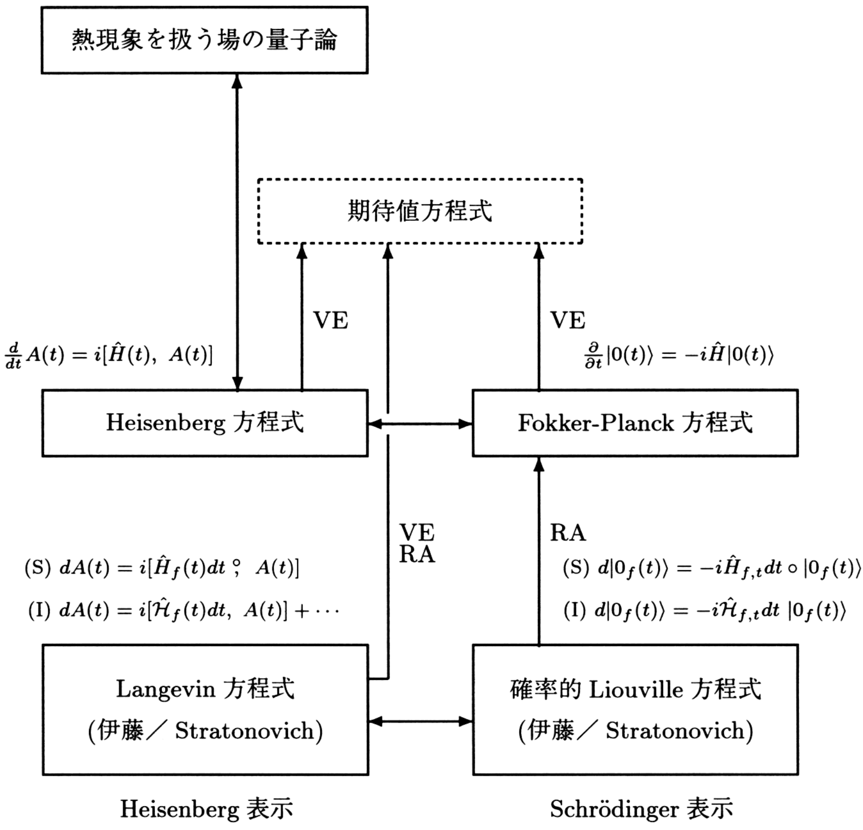



図.　理論体系（非平衡 TFD）の構造。RA は揺動力平均を意味し，VE は真空期待値を意味する。また，(I) と (S) は，それぞれ伊藤型と Stratonovich 型を意味する。

[15, 16, 17]。その観点からの森公式 [18] の解釈も進められている [8]。また，従来の方法で導出された確率微分方程式 [19, 20] との関連でも NETFD に基づいた議論がされている [7, 8]。これらを踏まえた量子確率微分方程式に関する表現空間の認識は，真空の属性という本書の基本概念をさらに深めることになろう。

この**量子性と散逸**にかかわる問題は，高速緩和や過渡的非線形光学過程にまつわる現象，メゾスコピックやナノ・サイズの技術の進歩による巨視的量子系（巨視的トンネリングなど）にかかわる現象，非平衡超伝導や化学物理における多くの興味深い現象，さらに光通信等に関連して量子情報通信理論との接点など，身近な多くの現象と深くかかわっている（たとえば，非線形量子光学の問題への応用としては，[21, 22] がある）。このような時期にあって，非平衡系の統計力学を，本書で紹介された理論体系に基づいてもう一度吟味しなおすための準備がなされたといえよう。自然認識をさらに深めるようなインパクトを，本書が多くの読者に与えることを期待する。

原著者は，長年にわたって練りあげてきた壮大な構想が，このようにさらに発展するというさなかに他界された。その胸中，察するに余りあるが，偉大な研究者のご冥福を祈りたい。

本書を原著者夫人，梅沢玉枝夫人に捧げます。

1995 年 6 月

有光敏彦，有光直子

# 参 考 文 献


[1] T. Arimitsu, 数理科学, 6 月号 (1990) 22.

[2] R. Kubo, J. Math. Phys. **4** (1963) 174.

[3] R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsume, *Statistical Physics II* (Springer, Berlin 1985).

[4] T. Arimitsu, Phys. Lett. **A153** (1991) 163.

[5] T. Saito and T. Arimitsu, Mod. Phys. Lett. B **6** (1992) 1319.

[6] T. Arimitsu, **物性若手夏の学校**講義録 (1993) ［物性研究 **60** (1993) 491 に掲載］.

[7] T. Arimitsu, Banff/CAP Workshop on Thermal Field Theory, ed. F. C. Khanna, R. Kobes, G. Kunstatter and H. Umezawa (World Science Pub., 1994) p. 136.

[8] T. Arimitsu, Condensed Matter Physics (Ukraine) **4** (1995) 26–88.

[9] K. Ito, Proc. Imp. Acad. Tokyo **20** (1944) 519.

[10] R. Stratonovich, J. SIAM Control **4** (1966) 362.

[11] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, Commun. Math. Phys. **83** (1984) 301.

[12] K. R. Parthasarathy, *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Monographs in Mathematics **85** (Birkhäuser Verlag, 1992).

[13] L. Accardi, Rev. Math. Phys. **2** (1990) 127.

[14] T. Arimitsu, Quantum Stochastic Culculus と物理, 京大数理研講究録 (1995) in press.

[15] N. N. Bogoliubov, A. A. Lognov and I. T. Todolov, *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory* (Benjamin 1975).

[16] N. Obata, 物性研究 **62** (1994) 62.

[17] N. Obata, 京大数理研講究録 **874** (1994) 156.

[18] H. Mori, Prog. Theor. Phys. **33** (1965) 423.

[19] F. Shibata and N. Hashitsume, Phys. Soc. Japan **44** (1978) 1435.

[20] C. W. Gardiner and M. J. Collett, Phys. Rev. A **31** (1985) 3761.

[21] N. Arimitsu and T. Arimitsu, Banff/CAP Workshop on Thermal Field Theory, ed. F. C. Khanna, R. Kobes, G. Kunstatter and H. Umezawa (World Science Pub., 1994) p. 174.

[22] T. Arimitsu and N. Arimitsu, Phys. Rev. E **50** (1994) 121–137.

# 索　　引

## J



## K

## U



## W



## Y



## Z

**訳者略歴**

有光敏彦（ありみつ としひこ）

1975年　東京大学理学部物理学科卒業
1980年　筑波大学物理学系助手
理学博士（東京大学）
1982年　筑波大学物理学系講師
1994年　筑波大学物理学系助教授

**主要著書**

初等物理シリーズ3. エネルギーと熱
（培風館）

有光直子（ありみつ なおこ）

1975年　お茶の水女子大学理学部物理学科卒業
1977年　横浜国立大学工学部助手
1984年　理学博士（東京大学）
1991年　横浜国立大学工学部講師





1995年7月10日　初版発行
1996年9月30日　初版第2刷発行

場の量子論
ミクロ，マクロ，そして熱物理学の最前線

原著者　H. Umezawa
訳　者　有光敏彦
　　　　有光直子
発行者　山本　格

発行所　株式会社　培風館
東京都千代田区九段南4-3-12・郵便番号102
電話(03)3262-5256(代表)・振替00140-7-44725

D.T.P. アベリー・中央印刷・三水舎製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN4-563-02221-7 C3042